مدرسان شریف

کارشناسی ارشد

آمار و احتمالات

ویژه رشته های
مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر

مؤلف : علی جعفری دهکردی

خلاصه درس ، نکات مهم به همراه سؤالات و پاسخهای
تشریحی کنکورهای سراسری و آزاد ۸۷-۷۸

بسم الله الرحمن الرحیم

خدایا چنان کن سرانجام کار

تو خشنود باشی و ما رستگار

سرشناسه: جعفری دهکردی، علی.

عنوان و پدیدآور: آمار و احتمالات / ویژه رشته‌های مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر کارشناسی ارشد مؤلف: علی جعفری دهکردی؛

مشخصات نشر: تهران: مدرسان شریف، ۱۳۸۷.

مشخصات ظاهری: ۲۱۲ ص.: مصور، جدول، نمودار.

شابک: 978-964-2838-70-7

وضعیت فهرست نویسی: فیپا

موضوع: دانشگاهها و مدارس عالی ـــ ایران ـــ آزمونها.

موضوع: آمار ـــ آزمونها و تمرینها (عالی).

موضوع: احتمالات ـــ آزمونها و تمرینها (عالی).

موضوع: آمار ـــ مسائل، تمرینها و غیره (عالی).

موضوع: احتمالات ـــ مسائل، تمرینها و غیره (عالی).

موضوع: آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی ـــ ایران.

رده بندی کنگره: LB ۲۳۵۳ / ج ۷۴ / ۸۳۵

رده بندی دیویی: ۳۷۸/۱۶۶۴

شماره کتابخانه ملی: ۱۰۳۷۷۸۶

نام کتاب: آمار و احتمالات

مؤلف: علی جعفری دهکردی

ناشر: انتشارات مدرسان شریف

تیراژ: ۱۰۰۰ جلد

چاپ سوم: بهار ۱۳۸۷

حروف چینی: واحد تایپ مؤسسه مدرسان شریف

چاپ و صحافی: مهدی ــ مینو

قیمت: ۴۲۰۰ تومان

شابک: 978-964-2838-70-7

« به نام خدا »

تقدیم به روح پرفتوح شهدا و رهبر کبیر جمهوری اسلامی ایران امام خمینی (ره)

زندگی امروزه جز با همراهی مستمر دانش و اطلاعات روز میسر نیست و اگر زیستن به معنای دانش اندوزی یک هدف والا و مقدس برای بشریت بوده و هست، طی مدارج علمی دانشگاهی نیز یکی از راههای سهل الوصول برای دستیابی به این خاصه فطرت آدمی است. نهادینه شدن علوم در طبقات اختصاصی آکادمیک انگیزه و رغبت جهت نیل به اهداف والا را افزایش می‌دهد. آزمون‌های تستی با تمام انتقادهایی که به همراه خود دارد در حال حاضر بهترین نوع گزینش دانشجو می‌باشد، لذا مؤسسه علمی ـ فرهنگی مدرسان شریف در راستای اهداف علمی ـ آموزشی خود اقدام به ارایه سری کتب آمادگی کنکور کارشناسی ارشد نموده است. کتاب‌های فوق مبتنی بر تجربیات چندین ساله اساتید در دانشگاه‌ها و مراکز آموزشی و بخصوص فعالیت‌های مستمر تدریس، تألیف و تحقیق در مؤسسه مدرسان شریف می‌باشد. با توجه به این‌که این مجموعه‌ها قبل از چاپ در کلاس‌های آمادگی آزمون کارشناسی ارشد مؤسسه بارها تدریس شده و با ملاحظه نقاط قوت و ضعف دانشجویان گرامی تهیه شده است، لذا امید است بتواند راهگشای ورود دانشجویان به دوره‌های کارشناسی ارشد باشد. کتاب «آمار و احتمالات ویژه رشته‌های مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر» تقدیم به دانشجویان و اساتید محترم می‌گردد.

مدیریت موسسه مدرسان شریف

«بسمه تعالی»

آمار و احتمالات به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات یکی از مهمترین و کاربردی‌ترین مباحث این علم می‌باشد. هنر یادگیری این علم مبتنی بر درک صحیح مفاهیم اولیه و حل مسائل زیاد و متنوع است. این کتاب که با هدف کمک به داوطلبان کنکورهای کارشناسی به کارشناسی ارشد تدوین گردیده است با توجه به تنوع تست و مثال این هدف را بطور کامل دنبال کرده است. خوانندگان مطمئناً از کامل و روان بودن کتاب لذت خواهند برد و می‌توانند همه مطالب مورد نیاز خود را در کتاب جستجو کنند.

در تدوین یک کتاب همیشه مؤلف با دو نیروی مخالف هم مواجه است. یکی گرایش طبیعی به گنجانیدن هر چه بیشتر مطالب در کتاب است، زیرا همه مطالب مهم و همه آنها را مؤلف مایل است به روش خود در کتاب وارد کند! از طرف دیگر مؤلف ناگزیر است تعریف دقیقی از هدف، سطح کتاب و خوانندگان کتاب مدنظر داشته باشد، و بر اساس آن تصمیم بگیرد که چه مطالبی را در کتاب بگنجاند و از آوردن چه مطالبی صرف‌نظر کند، تصور می‌کنم این کتاب با دقت فراوان با توجه به این دو نیروی مخالف تنظیم شده باشد.

کتاب از ۵ فصل تشکیل شده است که در ابتدای هر فصل مطالب درسی به همراه مثال‌ها و تست‌های متنوع شرح داده شده است. در انتهای فصل کلیه سؤالات کنکورهای سراسری و آزاد ۷۸ تا ۸۴ با حل کاملاً تشریحی گنجانده شده است و پس از آن آزمونی شامل تست‌های جدید که به عقیده من می‌تواند محک خوبی برای یادگیری مطالب فصل توسط دانشجو باشد، آورده شده است. در انتهای کتاب سه آزمون در سه سطح A و B و C در نظر گرفته شده که می‌تواند یک جمع‌بندی بسیار مفید باشد. این کتاب با توجه به تجربه سالها تدریس و نیاز واقعی دانشجویان تدوین شده است و وسواس بسیار زیادی در نوشتن مطالب و طبقه‌بندی آنها شده است.

ضمناً سؤالات آمار و احتمالات رشته‌های مهندسی برق و مهندسی کامپیوتر کنکورهای سراسری و آزاد ۸۷ ـ ۸۵ با پاسخنامه کاملاً تشریحی در انتهای کتاب ارائه گردیده است.

در پایان لازم است که از واحد تألیف و تایپ مؤسسه مدرسان شریف که در هر چه بهتر شدن این کتاب از هیچ کوششی دریغ نورزیدند کمال تشکر را داشته باشم.

همچنین از مدیریت محترم مؤسسه مدرسان شریف که رهنمودهای ایشان باعث ارتقای کتاب شده است کمال تشکر و امتنان را دارم.

یقیناً هر اثری توأم با خطایی است لذا از تمامی صاحب نظران و دانشجویان تقاضا دارم هرگونه اشکالی را از طریق شماره پیام کوتاه ۱۰۰۰۸۳۸۷ اطلاع دهند و یا با شماره تلفن‌های ۵۰ ـ ۶۶۹۴۶۹۶۰ (روابط عمومی مؤسسه مدرسان شریف) تماس حاصل نمایند. قبلاً از همکاری شما کمال تشکر را دارم.

علی جعفری دهکردی
بهار ۱۳۸۷

« فهرست مطالب »

فصل چهارم: توزیعهای آماری

فصل پنجم: نظریه برآورد

مدرسان شریف

فصل اول

« مفاهیم آمار توصیفی »

جمعیت یا جامعه‌ی آماری، مجموعه‌ای از اشیاء یا افرادی که یک یا چند ویژگی مشترک داشته باشند را یک جامعه آماری می‌گویند. هرکدام از افراد یا اشیاء را یک عنصر جمعیت و تعداد کل اعضاء جمعیت را اندازه جمعیت گویند.

نمونه: زیر مجموعه‌ای از جمعیت که بر اساس روش و قاعده خاصی (با توجه به نوع مسئله) برای مطالعه صفتی از جامعه انتخاب می‌شود را نمونه گویند. تعداد عضوهای نمونه را اندازه نمونه می‌نامند.

داده‌ها: در بررسی‌های آماری زمانی که می‌خواهیم صفتی را مورد مطالعه قرار دهیم معمولاً آن را با عدد و رقم نمایش می‌دهیم، حتی زمانی که این صفت به صورت کیفی باشد، این اعداد و ارقام را داده گویند. داده‌ها بر دو نوعند:

الف ـ داده‌های گسسته: داده‌هایی هستند که بین دو مقدار مورد نظر از آن‌ها هیچ عدد دیگری وجود نداشته باشد. مانند تعداد فرزندان یک خانواده، یا تعداد دانشجویان یک کلاس.

ب ـ داده‌های پیوسته: داده‌هایی هستند که بین هر دو مقدار مورد نظر از آن‌ها همواره عدد دیگری وجود داشته باشد مانند وزن یا طول قد افراد.

در آمار پس از جمع‌آوری داده‌ها به بررسی آماری بر روی آن‌ها می‌پردازیم برای این منظور داده‌ها را تنظیم، طبقه‌بندی و خلاصه می‌کنیم به طوری که اهداف و نتایج مورد نظر را به دست آوریم. انجام این کارها در سه مرحله انجام می‌گردد:

الف ـ تنظیم و طبقه‌بندی داده‌ها در یک جدول

ب ـ ترسیم نمودارهای گوناگون از روی مقادیر جدول

ج ـ خلاصه کردن داده‌ها در یک یا چند عدد که به آنها شاخص یا آماره گفته می‌شود.

سه موضوع فوق از مباحث اساسی بحث آمار توصیفی می‌باشند که هرکدام برای داده‌های گسسته و پیوسته متفاوت است. در این جا ما به معرفی و بررسی آنها می‌پردازیم.

جداول آماری

اولین مرحله در نمایش داده‌ها خلاصه کردن آنها، طبقه‌بندی و تنظیم در یک جدول به نام جدول آماری است. یک جدول آماری باید به نحوی تنظیم و ارائه شود که بتوان پاره‌ای از داشته‌های نهفته در داده‌ها را از آن استخراج کرد. معروف‌ترین جدول آماری جدول فراوانی است که در آن تعداد هر داده و درصد موجود از هر داده مشخص می‌شود.

یک جدول فراوانی شامل موارد زیر است:

الف ـ فراوانی مطلق و فراوانی نسبی: فرض کنید n داده از k نوع داشته باشیم و تعداد آنها به ترتیب $f_k,\dots,f_2,f_1$ باشند. به تعداد آنها یعنی $f_k,\dots,f_2,f_1$ فراوانی مطلق و به نسبت‌های $r_n=\frac{f_k}{n},\dots,r_2=\frac{f_2}{n},r_1=\frac{f_1}{n}$ فراوانی‌های نسبی طبقات گوییم، واضح است که برای $i=1,2,\dots,k$ داریم:

$$0\le f_i\le n \quad , \quad 0\le r_i\le 1$$

$$\sum_{i=1}^{k} f_i=f_1+f_2+\dots+f_k=n \quad , \quad \sum_{i=1}^{k} r_i=r_1+r_2+\dots+r_k=1$$

ب ـ فراوانی تجمعی (انباشته) و فراوانی تجمعی (انباشته) نسبی

با توجه به تعریف فراوانی نسبی، $s_j=\sum_{i=1}^{j} r_i, g_j=\sum_{i=1}^{j} f_i$ را به ترتیب فراوانی تجمعی و فراوانی تجمعی نسبی طبقه jام می‌نامند.

مثال ۱ : در یک دانشگاه ۲۰ نفر رشته مهندسی الکترونیک، ۳۰ نفر رشته مهندسی کامپیوتر، ۴۰ نفر رشته مهندسی صنایع و ۱۰ نفر رشته مهندسی شیمی می‌باشند. فراوانی‌های نسبی و تجمعی هر گروه را بدست آورید.

☑ **پاسخ :** طبق تعاریف فراوانی‌های نسبی و تجمعی برای هر گروه داریم:

$$r_1=\frac{f_1}{n}=\frac{20}{100}=0/2 \quad و \quad r_2=\frac{f_2}{n}=\frac{30}{100}=0/3 \quad و \quad r_3=\frac{f_3}{n}=\frac{40}{100}=0/4 \quad و \quad r_4=\frac{f_4}{n}=\frac{10}{100}=0/1$$

فراوانی تجمعی:

$$g_1=f_1=20$$
$$g_2=f_1+f_2=20+30=50$$
$$g_3=f_1+f_2+f_3=20+30+40=90$$
$$g_4=f_1+f_2+f_3+f_4=100$$

جدول فراوانی برای داده‌های گسسته:

در این جدول پارامترهای نشان دسته، فراوانی مطلق و نسبی، فراوانی تجمعی و تجمعی نسبی را قرار می‌دهیم. برای درک بهتر به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۲: کارخانه‌ای ۴ نوع محصول D,C,B,A تولید می‌کند. اگر این کارخانه روزانه به تعداد ۲۰ عدد از این محصولات را به شرح زیر تولید کند:

B,C,C,A,D,C,C,B,D,C,B,B,C,D,A,A,D,C,A,B

یک جدول فراوانی برای این محصولات تشکیل دهید.

☑ **پاسخ :** ابتدا چهار محصول D,C,B,A را به ترتیب با اعداد ۱،۲،۳ و ۴ متناظر می‌کنیم. با محاسبه فراوانی،فراوانی نسبی، فراوانی تجمعی و فراوانی تجمعی نسبی جدول فراوانی به صورت زیر به دست می‌آید.

محصولات	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
A	۱	۴	۰/۲	۴	۰/۲
B	۲	۵	۰/۲۵	۹	۰/۴۵
C	۳	۷	۰/۳۵	۱۶	۰/۸
D	۴	۴	۰/۲	۲۰	۱

اعداد و ارقام موجود در جدول دارای تعابیر خاصی هستند. به طور مثال عدد ۰/۳۵ در ستون فراوانی نسبی به این معنی است که ۳۵ درصد از محصولات تولیدی در یک روز از نوع C می‌باشد و عدد ۰/۸ در ستون فراوانی تجمعی نسبی به معنای آن است که ۸۰ درصد از محصولات تولیدی روزانه از نوع A یا B یا C می‌باشند.

جدول فراوانی برای داده‌های پیوسته

برای تشکیل جدول فراوانی داده‌های پیوسته مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱) دریافت داده‌ها از جامعه یا نمونه آماری و در صورت لزوم گرد کردن آنها.

۲) دامنه واقعی که تفاضل کوچکترین عدد از بزرگترین عدد است را به دست آوریم.

۳) داده‌ها را به تعدادی رده (طبقه) با طول مساوی تقسیم می‌کنیم. برای به دست آوردن تعداد رده‌ها قاعده عمومی وجود ندارد معمولاً تعداد رده‌ها را بین ۵ تا ۲۵ رده اختیار کرده البته قاعده‌ای به نام دستور استورگس برای این کار وجود دارد که در آن تعداد رده‌ها (طبقات) K از رابطه $K=1+3/322\log_{10}^{n}$ محاسبه می‌شود که n تعداد کل داده‌ها می‌باشد. معمولاً K را به عدد صحیح بزرگتر گرد می‌کنیم.

۴) طول هر رده (طبقه) از تقسیم دامنه R بر K به دست می‌آید معمولاً آن را به عدد بالاتر گرد می‌کنیم.

$$W=\frac{R}{K}$$

۵) تعیین حد پایین و بالای طبقات را بر اساس میزان تغییرپذیری داده‌ها که خود از تقسیم واحد گرد شده داده‌ها بر ۲ بدست می‌آید، محاسبه می‌شود.

میزان تغییرپذیری داده‌ها- حد پایین طبقه= کران پایین طبقه یا رده

میزان تغییر پذیری داده‌ها+ حد بالای طبقه = کران بالای طبقه یا رده

مثال ۳: تعداد $n=40$ داده آماری به صورت زیر داده شده‌اند برای آن‌ها یک جدول فراوانی رسم کنید. (این داده‌ها، داده‌هایی پیوسته هستند).

۵۲ ۳۵ ۲۴ ۴۷ ۳۶ ۵۱ ۳۴ ۳۸ ۴۶ ۴۳
۴۷ ۳۶ ۳۸ ۵۰ ۴۷ ۳۴ ۴۱ ۴۰ ۴۲ ۴۰
۲۶ ۲۹ ۳۰ ۳۲ ۳۰ ۳۵ ۳۷ ۳۷ ۴۱ ۲۱
۳۱ ۳۰ ۲۶ ۳۵ ۴۵ ۲۳ ۴۳ ۳۱ ۳۴ ۴۳

☑ **پاسخ:** به ترتیب مراحل گفته شده بالا را انجام می‌دهیم:

$$R=\max-\min=52/5-20/5=32$$

$$K=1+3/322\log_{10}^{40}=6/322\approx 7$$

$$W=\frac{R}{K}=\frac{32}{7}=4/57\approx 5$$

۲۰/۵ = ۰/۵ − ۲۱ = میزان تغییرپذیری- کوچک‌ترین داده= حد پایین طبقه اول

۲۵/۵ = ۵ + ۲۰/۵ = طول رده+ حد پایین طبقه اول= حد بالای طبقه اول

اکنون ستونی برای فراوانی، ستونی را به عنوان نماینده دسته (که نقطه وسط رده (طبقه) می‌باشد). ستونی به نام فراوانی نسبی، ستونی برای فراوانی تجمعی و ستونی را برای فراوانی تجمعی نسبی تشکیل می‌دهیم به جدول زیر توجه کنید.

رده‌ها (طبقات)	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۲۰/۵ − ۲۵/۵	۲۳	۳	۰/۰۷۵	۳	۰/۰۷۵
۲۵/۵ − ۳۰/۵	۲۸	۶	۰/۱۵	۹	۰/۲۲۵
۳۰/۵ − ۳۵/۵	۳۳	۱۰	۰/۲۵	۱۹	۰/۴۷۵
۳۵/۵ − ۴۰/۵	۳۸	۸	۰/۲۰	۲۷	۰/۶۷۵
۴۰/۵ − ۴۵/۵	۴۳	۶	۰/۱۵	۳۳	۰/۸۲۵
۴۵/۵ − ۵۰/۵	۴۸	۵	۰/۱۲۵	۳۸	۰/۹۵
۵۰/۵ − ۵۵/۵	۵۳	۲	۰/۰۵	۴۰	۱
جمع		۴۰	۱		

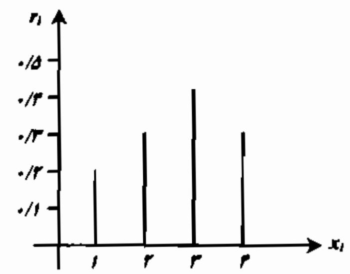
با استفاده از جدول بالا می‌توان نتیجه گرفت که ۲۵% از داده‌ها بین ۳۵/۵ − ۳۰/۵ بوده و ۴۷/۵% از آن‌ها کم‌تر از ۳۵/۵ است.

نمودارهای آماری

گام بعدی برای خلاصه کردن داده‌ها تبدیل جدول فراوانی به نمودارهایی است که بتوان از درون این نمودار اطلاعات نهفته را به صورت عینی و بدون توضیح مشاهده کرد. نمودارهای آماری نیز مانند جداول فراوانی برای داده‌های گسسته و داده‌های پیوسته متفاوتند.

الف: نمودارهای آماری برای داده‌های گسسته

۱) نمودار میله‌ای: در این نمودار بر روی محور افقی مقادیر x_i ها و بر روی محور عمودی مقادیر فراوانی نسبی r_i ها نمایش داده می‌شود.



۲) نمودار دایره‌ای: دایره‌ای را رسم کرده و این دایره به تعداد طبقات جدول فراوانی به قطاع‌هایی تقسیم می‌شود، به طوری که اندازه هر قطاع متناسب با فراوانی نسبی طبقه‌ی مربوطه باشد.

$\frac{f_i}{n}\times 360^\circ$: سهم هر طبقه بر حسب درجه

$\frac{f_i}{n}\times 100$: سهم هر طبقه بر حسب درصد

۳) نمودار شاخه و برگ (steam – and – leaf)

برای رسم نمودار شاخه و برگ، هر مقدار بدست آمده را به دو بخش تقسیم نموده (توجه شود که برای رسم این نمودار باید اعداد حداقل ۲ رقمی باشند)، یک بخش را شاخه و بخش دیگر را برگ می‌نامیم آنگاه برای هر شاخه برگهای مربوطه را به طور جداگانه در مقابل آن می‌نویسیم.

***مثال ۴:** فرض کنید داده‌های زیر تعداد دانشجویان کلاسهای مختلف در یک دانشگاه باشند نمودار شاخه و برگ را رسم کنید.*

۲۲ ۲۴ ۲۵ ۳۴ ۳۵ ۴۱ ۴۱ ۴۶ ۴۶ ۴۶ ۴۷ ۴۸ ۵۴ ۵۹ ۶۰

☑ **پاسخ:** هر داده را دو قسمت می‌کنیم : رقم دهگان را ساقه و رقم یکان را برگ می‌نامیم . مثلاً عدد ۴۶ رقم ۴ ساقه و رقم ۶ برگ را می‌سازند.

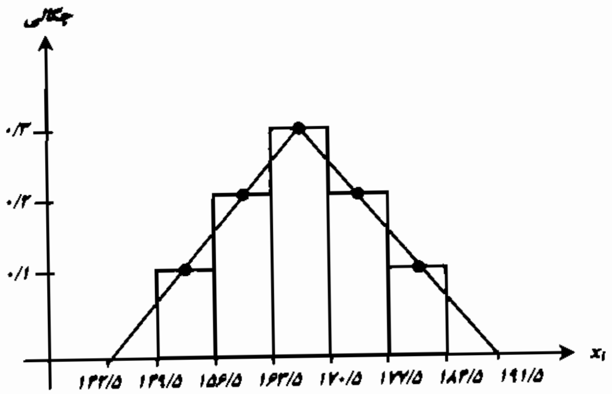
ساقه را به ترتیب صعودی از بالا به پایین طرف چپ یک خط عمودی می‌گذاریم.

برگهای هر ساقه را به ترتیب غیرنزولی از چپ به راست طرف دیگر خط عمودی پهلوی آن ساقه می‌گذاریم.

۲	۲ ۴ ۵
۳	۴ ۵
۴	۱ ۱ ۶ ۶ ۶ ۷ ۹
۵	۴ ۹
۶	۰

ب) نمودارهای آماری برای داده‌های پیوسته

۱) هیستوگرام (بافت نگار): نموداری می‌باشد که از تعدادی مستطیل تشکیل شده است. تعداد این مستطیل‌ها برابر با تعداد طبقات جدول فراوانی و مرکز آن نماینده رده است. ارتفاع هر مستطیل برابر چگالی فراوانی مربوط به آن طبقه است.



$$\text{چگالی فراوانی} = \frac{\text{فراوانی طبقه‌ی مربوط}}{\text{طول طبقه مربوط}}$$

۲) چند بر فراوانی: اگر وسط قاعده‌های بالای مستطیل‌های نمودار هیستوگرام را به وسیله خطوط به طور متوالی به یکدیگر وصل کرده و ابتدای آن را به وسط رده ما قبل و انتهای آن را به وسط رده مابعد مستطیل‌ها وصل کنیم یک چند ضلعی به وجود می‌آید که آن را چند بر فراوانی گویند و مساحت زیر این چند بر فراوانی نیز یک واحد مربع یا مساوی N می‌باشد.

۳) منحنی فراوانی: زمانی که تعداد داده‌ها زیاد و طول رده‌ها کوچک باشند در این صورت تعداد رده‌ها زیاد شده و در نتیجه تعداد اضلاع چند بر فراوانی نیز زیاد می‌شود و به یک منحنی نزدیک می‌شود که به آن منحنی فراوانی گویند.

خلاصه کردن داده‌ها در چند عدد

اطلاعات نهفته در داده‌ها را می‌توان با استفاده از جداول آماری و نمودارهای آماری تا حدودی به دست آورد لیکن برای این که بتوان نتایج کلی درباره صفت مورد مطالعه را به دست آورد و این نتایج را گزارش کرد بهتر آن است که داده‌ها، در یک یا چند عدد خلاصه شوند. چنین اعدادی را شاخص یا معیار گویند که خود به سه شاخص تمرکز و پراکندگی و نسبی پراکندگی تقسیم می‌شوند.

الف: شاخص‌های تمرکز

مقادیری هستند که معمولاً در حوالی مرکز منحنی فراوانی قرار دارند مهم‌ترین شاخص‌های تمرکز، میانگین، میانه و نما یا مد می‌باشند که در زیر طرز به دست آوردن هرکدام را در داده‌های گسسته و پیوسته توضیح خواهیم داد.

میانگین

فرض کنید n داده به صورت $x_1, x_2, \dots, x_k$ با فراوانی‌های مطلق $f_1, f_2, \dots, f_k$ خلاصه شده باشند. (در صورتی که داده‌ها پیوسته باشند، x_i ها را نماینده رده‌ها می‌گیریم و در غیر این صورت x_i ها خود داده‌ها می‌باشند.) میانگین حسابی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

خواص میانگین حسابی:

۱) مجموع انحراف داده‌ها از میانگین همواره صفر است. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$

۲) $y_i = x_i \pm a \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} \pm a$

۳) $y_i = a x_i \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x}$

۴) $y_i = \frac{x_i}{a} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\bar{x}}{a}$

۵) $y_i = x_i + z_i \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + \bar{z}$

۶) a عدد دلخواه است. این خاصیت بیان می‌دارد که $\sum (x_i - a)^2$ وقتی کمترین مقدار را اختیار می‌کند که a برابر با میانگین حسابی باشد.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 < \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$$

میانگین هندسی: در داده‌هایی که بر حسب درصد یا نسبت می‌باشند بهتر است از میانگین هندسی استفاده کنیم که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$G = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{f_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$

در اینجا x_i ها نشان دهنده داده‌ها و f_i ها فراوانی‌های مطلق آنها می‌باشند.

> **توجه :**
> **از میانگین هندسی برای محاسبه حد متوسط شاخص‌ها، نسبت‌ها،درصدها و نرخ‌های رشد استفاده می‌شود.**

مثال ۵ : با تغییر مدیریت در کارخانه‌ای، فروش در سال اول ۲ برابر سال قبل، در سال دوم ۳ برابر سال اول و در سال سوم ۴ برابر سال دوم شده است. به طور متوسط، فروش از آغاز مدیریت چند برابر شده است؟

۱) $2\sqrt[3]{3}$ ۲) $\sqrt[3]{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق رابطه گفته شده فراوانی‌های مطلق برای هر داده برابر با ۱ می‌باشند بنابراین:

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2....x_n} \Rightarrow G = \sqrt[3]{2\times 3\times 4} = 2\sqrt[3]{3}$$

مثال ۶ : جدول زیر، تولید کارخانه‌ای را در سالهای مختلف نشان می‌دهد متوسط نرخ رشد این کارخانه کدام است؟

سال	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
حجم تولید (x_i)	۱۵	۲۰	۳۰	۳۰	۳۵	۴۰

۱) $\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$ ۲) $\sqrt[5]{\frac{8}{3}}$ ۳) $\sqrt[5]{\frac{3}{8}}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا رشد هر سال را باید بدست آوریم:

سال	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
رشد	–	$\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$	$\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$	$\frac{30}{30}=1$	$\frac{35}{30}=\frac{7}{6}$	$\frac{40}{35}=\frac{8}{7}$

طبق فرمول میانگین هندسی:

$$G = \sqrt[5]{\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\times 1\times\frac{7}{6}\times\frac{8}{7}} = \sqrt[5]{\frac{8}{3}}$$

میانگین همساز یا هارمونیک

اگر هیچ‌کدام از داده‌ها صفر نباشند و مقیاس داده‌ها به صورت ترکیبی باشد ($\frac{km}{h}$ یا $\frac{m}{s}$ یا ...) از میانگین هارمونیک استفاده کرده که رابطه آن به صورت زیر می‌باشد:

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i}{x_i}} \quad , \quad x_i \neq 0$$

> **توجه : از میانگین هارمونیک برای محاسبه حد متوسط سرعت‌ها، مطالعه در شبکه‌های برق و عینک‌شناسی استفاده می‌کنند.**

مثال ۷ : اتومبیلی مسیری را با سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت رفته، در مسیر برگشت $\frac{1}{3}$ مسیر را با سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت و باقیمانده را با سرعت ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت برگشته است. متوسط سرعت این اتومبیل چقدر است؟

۱) ۱۰۱/۴ ۲) ۱۰۵/۲ ۳) ۱۰۹/۳ ۴) ۱۶۲/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق رابطه میانگین هارمونیک:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i}{\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i}{x_i}} = \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{100}+\frac{\frac{1}{3}}{80}+\frac{\frac{2}{3}}{120}} = 101/4$$

نکته ۱ : بین میانگین‌ها همواره رابطه $H \le G \le \bar{X}$ برقرار است.

میانه

داده‌های x_1 و x_2 و ... x_n را که به طور غیرنزولی مرتب شده‌اند در نظر بگیرید عدد m را میانه این داده‌ها گویند در صورتی که تقریباً نصف داده‌ها در سمت چپ و نصف داده‌ها در سمت راست این عدد قرار گیرند. روش محاسبه میانه برای داده‌های گسسته و پیوسته به صورت زیر می‌باشد:

محاسبه میانه برای داده‌های گسسته

فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_k$ داده‌های مورد بررسی ما می‌باشند اگر آنها را به صورت غیرنزولی مرتب کنیم آنگاه، اگر تعداد این داده‌ها فرد باشد عدد وسط این داده‌ها میانه است و اگر تعداد این داده‌ها زوج باشد نصف مجموع دو داده‌ای که در وسط قرار دارند میانه می‌باشد.

مثال ۸ : میانه را برای داده‌های ۲۱ ، ۲۰,۱۹,۲۱,۱۴,۱۲,۱۵,۱۸,۱۲ را به دست آورید.

☑ **پاسخ :** ابتدا داده‌ها را به طور غیر نزولی مرتب می‌کنیم یعنی ۱۲,۱۲,۱۴,۱۵,۱۸,۱۹,۲۰,۲۱,۲۱ .

چون تعداد داده‌ها $n = 9$ فرد می‌باشد، بنابراین $m = x_5 = 18$ یعنی داده پنجم میانه داده‌ها می‌باشد.

مثال ۹ : میانه را برای داده‌های ۲،۵،۷،۹،۴،۸،۱۱،۱۲ به دست آورید.

☑ **پاسخ :** ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم ۱۲ و ۱۱ و ۹ و ۸ و ۷ و ۵ و ۴ و ۲ .

چون $n = 8$ زوج است، بنابراین $m = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{7+8}{2} = 7/5$

محاسبه میانه برای داده‌های پیوسته

ابتدا در جدول فراوانی مقدار $\frac{n}{2}$ را به دست می‌آوریم اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{n}{2}$ باشد را در نظر می‌گیریم این رده یا طبقه میانه‌دار است. سپس از فرمول زیر میانه را محاسبه می‌کنیم:

$$m = L + \frac{(\frac{n}{2} - g)}{f}.w$$

L : کرانه واقعی پایین طبقه میانه‌دار ; g : فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه میانه‌دار

f : فراوانی طبقه میانه‌دار ; w : فاصله طبقات

مثال ۱۰: *در جدول زیر میانه کدام است؟*

حدود طبقات	۲۰-۲۹	۳۰-۳۹	۴۰-۴۹	۵۰-۵۹
f	۳	۶	۷	۴
g	۳	۹	۱۶	۲۰

۱) ۲۷/۸۲   ۲) ۴۵/۳۰   ۳) ۴۱/۷   ۴) ۴۰/۹۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ابتدا $\frac{n}{۲}=۱۰$ را به دست می‌آوریم طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگتر از $\frac{n}{۲}$ است، طبقه سوم است. پس این طبقه میانه‌دار است.

$$m=۳۹/۵+(\frac{۱۰-۹}{۷})۱۰=۴۰/۹۲$$

خواص میانه:

۱ـ هر جامعه آماری فقط یک میانه دارد.

۲ـ این خاصیت بیان می‌داد که $\sum|x_i-a|$ وقتی کمترین مقدار خود را دارد که a برابر با میانه باشد. $\sum_{i=۱}^{n}|x_i-m|\le\sum_{i=۱}^{n}|x_i-a|$

مثال ۱۱ : ***فرض کنید بین دو شهر که فاصله آنها ۲۰۰ کیلومتر است، ۷ پایگاه پلیس راه وجود داشته باشد در جدول زیر تعداد اتومبیل‌های هر پایگاه پلیس و فواصل پایگاهها مشخص شده است:***

فواصل	۰-۲۰	۲۰-۴۰	۴۰-۶۰	۶۰-۸۰	۸۰-۱۰۰
تعداد اتومبیل‌ها	۵	۱۰	۲۰	۵	۱۰

می‌خواهیم یک پمپ بنزین در این جاده احداث کنیم این پمپ بنزین باید در چند کیلومتری مبدأ احداث شود تا جمع کل مسافت‌های پیموده شده برای سوخت‌گیری اتومبیل‌های پلیس حداقل شود؟

۱) ۵۵   ۲) ۴۵   ۳) ۳۵   ۴) ۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» فرض کنید a محل احداث پمپ بنزین از مبدأ و x_i محل پایگاه پلیس i ام باشد مسافت پیموده شده توسط هر ماشین از پایگاه i ام تا پمپ بنزین برابر با $|x_i-a|$ می‌باشد. بنابراین باید $\sum f_i|x_i-a|$ به حداقل برسد طبق خاصیت گفته شده باید a برابر با میانه باشد بنابراین میانه جدول بالا را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{n}{۲}=۲۵ \quad\Rightarrow\quad m=۴۰+(\frac{۲۵-۱۰}{۲۰}).۲۰=۵۵$$

یعنی پمپ بنزین باید در ۵۵ کیلومتری از مبدأ احداث شود.

مد یا نما

داده‌ای که فراوانی آن از سایر داده‌ها بیشتر باشد را نما یا مد می‌نامند و با نماد Mo نمایش می‌دهند مانند میانه، مد به صورت جداگانه برای داده‌های گسسته و پیوسته محاسبه می‌شود.

محاسبه نما برای داده‌های گسسته: ابتدا فراوانی داده‌ها را پیدا می‌کنیم داده‌ای که فراوانی آن بیشتر است را به عنوان نما اختیار می‌کنیم. اگر دو داده غیر مجاور دارای فراوانی یکسان و بیش از سایر فراوانی‌ها باشند هر دو را به عنوان نما یا مد اختیار کرده و داده‌ها را دونمایی می‌گوییم و اگر این دو داده مجاور یکدیگر باشند نصف مجموع آن را به عنوان نما اختیار می‌کنیم. اگر تمام داده‌ها، فراوانی یکسانی داشته باشند داده‌ها را بدون نما گوییم.

مثال ۱۲ : ***برای داده‌های ۲،۳،۴،۷،۹،۱۱،۱۱،۱۷،۱۸ مد کدام است؟***

۱) ۷   ۲) ۱۱   ۳) ۱۲   ۴) ۱۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» چون فراوانی داده ۱۱ از سایرین بیشتر است، پس $MO=۱۱$.

مثال ۱۳ : ***برای داده‌های ۳،۲،۷،۲،۷،۴،۳،۴،۳،۴،۷ چون فراوانی همه داده‌ها یکسان است پس داده‌ها بدون نما هستند.***

مثال ۱۴ : ***برای داده‌های ۷، ۳، ۴، ۳، ۴، ۷، ۴، ۷، ۳ مقدار مُد کدام است؟***

۱) ۷ و ۴ و ۳   ۲) ۷ و ۴   ۳) صفر   ۴) مُد وجود ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» چون فراوانی داده‌ها یکسان است مُد وجود ندارد.

محاسبه نما برای داده‌های پیوسته: در جدول فراوانی طبقه‌ای که فراوانی آن بیشتر است را انتخاب می‌کنیم و سپس از فرمول زیرنما را محاسبه می‌کنیم.

$$MO=L+(\frac{d_۱}{d_۱+d_۲}).w$$

L: کران پایین واقعی طبقه مد دار   و $d_۱$: اختلاف فراوانی رده نمایی و رده قبل

$d_۲$: اختلاف فراوانی رده نمایی و رده بعد از آن   ; w : طول رده

مثال ۱۵ : ***در جدول روبرو مد یا نما کدام است؟***

$C-L$	۳-۵	۶-۸	۹-۱۱
f_i	۴	۲۰	۱۲

۱) ۷/۵   ۲) ۶/۹   ۳) ۷/۲   ۴) ۹/۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبقه دوم دارای بیشترین فراوانی است و طبق رابطه بالا داریم:

$$MO=۵/۵+(\frac{۱۶}{۱۶+۸})\times ۲=۶/۹$$

رابطه تجربی بین شاخص‌های تمرکز

چنانچه توزیع داده‌ها متقارن باشد، میانگین و میانه و مد بر هم منطبق هستند (شکل ۱) ولی در نمونه‌هایی که توزیع متقارن نیست و چولگی (عدم تقارن) وجود دارد میانه بین میانگین و مد قرار می‌گیرد. اگر چولگی مثبت باشد میانه از مد بزرگتر است (شکل ۲) و اگر چولگی منفی باشد میانه از مد کوچکتر است (شکل ۳).

شکل (۱)   شکل (۲)   شکل (۳)

در توزیع‌هایی که چولگی شدید نباشد رابطه‌ای تجربی توسط پیرسون ارائه شد.

(میانه ـ میانگین) ۳ ≈ مد ـ میانگین

توجه شود که در توزیع‌هایی که چولگی شدید باشد رابطه بالا برقرار نیست.

مثال ۱۶: در یک توزیع خفیفاً چوله مقدار میانه برابر با ۵۰ و مقدار مد برابر ۴۰ می‌باشد مقدار تقریبی میانگین کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۶۵ ۴) ۷۵

پاسخ: گزینه «۲». طبق رابطه پیرسن:

$$\bar{X} - MO = ۳(\bar{X} - Me)$$
$$\bar{X} - ۴۰ = ۳\bar{X} - ۱۵۰ \Rightarrow ۲\bar{X} = ۱۱۰ \Rightarrow \bar{X} = ۵۵$$

چندک‌ها

عدد Q_p را که در آن ۱ > p > ۰، چندک مرتبه p می‌نامند، هرگاه تقریباً ۱۰۰p درصد داده‌ها کوچکتر از آن باشند. مثلاً $Q_{۰/۳۵}$ را چندک مرتبه ۰/۳۵ می‌گویند هرگاه تقریباً ۳۵ درصد داده‌ها کوچکتر از $Q_{۰/۳۵}$ باشد.

چندک‌های معروف عبارتند از:

۱) چارک‌ها: که به ازای p = ۰/۲۵، ۰/۵۰، ۰/۷۵ به دست می‌آیند و آنها را به ترتیب با $Q_۱, Q_۲, Q_۳$ نشان می‌دهند و $Q_۱, Q_۳$ را چارک اول و سوم و $Q_۲$ را میانه گویند. $Q_۱$ را می‌توان میانه برای داده‌هایی پنداشت که کوچکتر یا مساوی میانه یا m هستند. همچنین $Q_۳$ را می‌توان میانه برای داده‌هایی پنداشت که بزرگتر یا مساوی m هستند.

۲) دهک‌ها: که به ازای p = ۰/۱، ۰/۲، ...، ۰/۹ به دست می‌آیند و آنها را با $D_۱, D_۲, ..., D_۹$ نشان می‌دهند.

۳) صدک‌ها: به ازای p = ۰/۰۱، ۰/۰۲، ...، ۰/۹۹ به دست می‌آیند و آنها را با $p_۱, p_۲, ..., p_{۹۹}$ نشان می‌دهند.

محاسبه‌ی چندک‌ها برای داده‌های گسسته

فرض کنید n داده به صورت غیر نزولی به صورت $x_۱ \le x_۲ \le ... \le x_n$ تنظیم شده باشند. برای به دست آوردن Q_p ابتدا مقدار $(n+۱).p$ را محاسبه می‌کنیم. اگر این مقدار عدد صحیح r باشد آنگاه $Q_p = x_{(r)}$. در غیر اینصورت بزرگترین عدد صحیح در $(n+۱).p$ را مساوی r و اختلاف آن با r را w می‌گیریم واضح است که $۰ \le w < ۱$ در این صورت.

$$Q_p = (۱-w)x_{(r)} + wx_{(r+۱)}$$

مثال ۱۷: در داده‌های روبرو دهک هفتم کدام است؟ ۳،۳،۳،۵،۷،۸،۹،۹،۱۰

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱». ابتدا مقدار $(n+۱).P$ را محاسبه می‌کنیم چون این مقدار عدد صحیح است. بنابراین:

$$(n+۱).p = (۹+۱).\frac{۷}{۱۰} = ۷ \Rightarrow D_۷ = x_۷ = ۹$$

مثال ۱۸: برای داده‌های ۱،۲،۳،۳،۴،۵،۷،۷،۸،۱۲ که به ترتیب غیرنزولی مرتب شده‌اند $Q_{۰/۶}$ کدام است؟

۱) ۵/۴ ۲) ۶/۲ ۳) ۷ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۲». مقدار $(n+۱).P$ مقداری اعشاری است. بنابراین:

$$(n+۱)p = (۱۰+۱)\times ۰/۶ = ۶/۶$$
$$Q_{۰/۶} = (۱-۰/۶)x_{(۶)} + ۰/۶x_{(۷)} = ۰/۴\times ۵ + ۰/۶\times ۷ = ۶/۲$$

محاسبه چندک‌ها برای داده‌های پیوسته

روش محاسبه، مشابه روش محاسبه میانه است ابتدا $n\times p$ را محاسبه می‌کنیم اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی $n\times p$ باشد را انتخاب کرده آن را طبقه چندک‌دار می‌نامیم و با استفاده از رابطه زیر چندک pام را محاسبه می‌کنیم.

$$Q_p = L_p + (\frac{np-g}{f}).w$$

L_p: کران پایین واقعی طبقه چندک‌دار

g: فراوانی تجمعی طبقه قبل

f: فراوانی مطلق خود طبقه

w: طول دسته

مثال ۱۹: در جدول زیر مقدار چارک سوم کدام است؟

C-L	۱۰-۲۰	۲۰-۳۰	۳۰-۴۰
فراوانی	۱۰	۳۰	۲۰
فراوانی تجمعی	۱۰	۴۰	۶۰

۱) ۳۵ ۲) ۳۲/۵ ۳) ۳۷ ۴) ۳۹/۲

پاسخ: گزینه «۲». $n\times p = ۶۰\times\frac{۷۵}{۱۰۰} = ۴۵$ پس اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی ۴۵ است طبقه سوم است.

طبق رابطه گفته شده بالا: $Q_۳ = ۳۰ + (\frac{۴۵-۴۰}{۲۰})\times ۱۰ = ۳۲/۵$

توجه: $p_{۵۰} = D_۵ = Q_۲ = m$

شاخص‌های پراکندگی: به وسیله‌ی شاخص‌های تمرکز می‌توان میزان تمرکز داده‌ها را در یک عدد خلاصه کرد. در ارتباط با داده‌های آماری میزان پراکندگی آن‌ها نیز بسیار مهم می‌باشد. بدین معنی که اندازه‌های گرفته شده تا چه حد از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند. شاخص‌های پراکندگی به عنوان معیاری برای سنجش میزان تغییرات داده‌ها می‌باشد.

دامنه داده‌ها: اگر $x_{(۱)}$ کوچکترین داده و $x_{(n)}$ بزرگترین داده باشد، آنگاه $R = x_{(n)} - x_{(۱)}$ را دامنه داده‌ها گویند. توسط دامنه‌ها وسعت پراکندگی داده‌ها را معرفی می‌کنند. اما دامنه داده‌ها به نظر شاخص مناسب و کافی برای سنجش تغییرپذیری داده‌ها نیست زیرا تنها به کوچکترین و بزرگترین داده وابسته است.

میانگین انحرافات: اختلاف مثبت داده x_i از میانگین یعنی $|x_i - \bar{x}|$ را انحراف از میانگین داده x_i می‌گویند. اکنون اگر از این انحرافات میانگین بگیریم $D = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} f_i |x_i - \bar{x}|$ را میانگین انحراف گویند.

واریانس و انحراف استاندارد: میانگین مجذور انحرافات را واریانس می‌نامند و با نماد $s^۲$ یا $\sigma^۲$ نمایش می‌دهند.

$$\sigma^۲ = s^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^۲$$

جذر مثبت واریانس را انحراف استاندارد گویند که با نماد s یا σ نشان می‌دهند. فرمول مناسب‌تری برای واریانس عبارت است از:

$$s^۲ = \frac{۱}{n-۱}\left[\sum_{i=۱}^{k} f_i x_i^۲ - \frac{۱}{n}(\sum_{i=۱}^{k} f_i x_i)^۲\right]$$

مثال ۲۰ : برای داده‌های ۹,۳,۰,۲,۱ واریانس و انحراف استاندارد به ترتیب عبارتند از:

۱) ۱۵ و ۴/۳۱　　۲) $\sqrt{2}$ و $\sqrt[4]{2}$　　۳) ۱۵ و ۳/۸۷　　۴) ۱ و ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum f_i x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum f_i x_i\right)^2\right]=\frac{1}{5-1}\left[140-\frac{1}{5}(20)^2\right]=\frac{1}{4}\times 60=15 \Rightarrow S=\sqrt{15}=3/87$$

خواص واریانس.

۱ـ اگر به تک تک داده‌ها ، مقدار ثابتی مانند b را اضافه کنیم تغییری در واریانس داده‌های جدید ایجاد نمی‌شود:

$$\mathrm{Var}(x+b)=\mathrm{Var}(x)$$

۲ـ اگر تک تک داده‌ها را در عدد ثابت a ضرب کنیم واریانس داده‌های جدید a^2 برابر واریانس داده‌های قدیم خواهد بود:

$$\mathrm{Var}(ax)=a^2\mathrm{Var}(x)$$

۳ـ به ازای هر عدد ثابت مانند a و b داریم:

$$\mathrm{Var}(ax\pm b)=a^2\mathrm{Var}(x)$$

مثال ۲۱: اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_k$ برابر با ۲ باشد واریانس داده‌های $3x_1+4$ و $3x_2+4$ و ... و $3x_k+4$ کدام است؟

۱) ۱۴　　۲) ۱۲　　۳) ۱۸　　۴) ۲۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\mathrm{Var}(3x_i+4)=(3)^2.\mathrm{Var}(x_i)=9\times 2=18$$

روش کوتاه یا روش کدگذاری برای محاسبه میانگین و واریانس.

معمولاً برای داده‌های بزرگ محاسبات واریانس و میانگین مشکل است. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_k$ را به وسیله‌ی تبدیل زیر به داده‌های $y_1, y_2, \ldots, y_k$ تبدیل می‌کنیم.

$$y_i=\frac{x_i-a}{b} \qquad i=1,2,\ldots,k$$

که در آن b,a مقادیر ثابتی هستند و به ترتیب برای تغییر مبداء و تغییر واحد اندازه‌گیری داده‌ها به کاربرده می‌شوند. اکنون با استفاده از داده‌های جدید $y_1, y_2, \ldots, y_k$ میانگین و واریانس به دست آمده و از روی این میانگین و واریانس جدید میانگین و واریانس داده‌های اصلی را به دست می‌آوریم.

$$\bar{x}=a+b\bar{y} \quad : \quad s_x^2=b^2 s_y^2$$

مثال ۲۲: جدول زیر را در نظر بگیرید و میانگین و واریانس داده‌ها را با استفاده از روش کوتاه به دست آورید.

رده یا طبقه	x_i	f_i	r_i	g_i	s_i
۱۴۹/۵ − ۱۵۶/۵	۱۵۳	۱۵	۰/۱۵	۱۵	۰/۱۵
۱۵۶/۵ − ۱۶۳/۵	۱۶۰	۲۰	۰/۲۰	۳۵	۰/۳۵
۱۶۳/۵ − ۱۷۰/۵	۱۶۷	۳۰	۰/۳۰	۶۵	۰/۰۶۵
۱۷۰/۵ − ۱۷۷/۵	۱۷۴	۲۵	۰/۲۵	۹۰	۰/۹۰
۱۷۷/۵ − ۱۸۴/۵	۱۸۱	۱۰	۰/۱۰	۱۰۰	۱

☑ **پاسخ :** فرض می‌کنیم $b=7$　　$a=167$

x_i	f_i	y_i	y_i^2	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
۱۵۳	۱۵	−۲	۴	−۳۰	۶۰
۱۶۰	۲۰	−۱	۱	−۲۰	۲۰
۱۶۷	۳۰	۰	۰	۰	۰
۱۷۴	۲۵	۱	۱	۲۵	۲۵
۱۸۱	۱۰	۲	۴	۲۰	۴۰

ابتدا طبق توضیحات داده شده میانگین y را بدست می‌آوریم:

$$y_i=\frac{x_i-167}{7} \Rightarrow \bar{y}=\frac{0}{100}=0$$

سپس طبق رابطه $\bar{x}=a+b\bar{y}$ داریم:

$$\bar{x}=7\times(-0/05)+0=0 \Rightarrow \bar{x}=-0/35$$

همچنین

$$s_y^2=\overline{y^2}-\bar{y}^2=\frac{145}{100}-0/0025=1/44$$

$$S_x^2=b^2S_y^2$$

شاخصهای نسبی پراکندگی.

ضریب تغییرات: واریانس و انحراف استاندارد به واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی دارند برای مقایسه دو سری از داده‌ها که هم واحد نیستند، بهتر است از شاخص‌هایی استفاده کنیم که به واحد داده‌ها بستگی نداشته باشد یکی از این شاخص‌ها ضریب تغییرات یا ضریب پراکندگی تغییرات می‌باشد که به صورت $C.V=\frac{s}{\bar{x}}\times 100$ بر حسب درصد بیان می‌شود.

مثال ۲۳ : کارخانه‌ای دو نوع لاستیک اتومبیل تولید می‌کند برای نوع A میانگین طول عمر ۱۰۰۰۰ کیلومتر، با انحراف استاندارد ۲۰۰۰ کیلومتر، برای نوع B میانگین طول عمر ۱۱۰۰۰ کیلومتر با انحراف استاندارد ۱۰۰۰ کیلومتر می‌باشد. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

☑ **پاسخ:**

ضریب تغییرات برای نوع A　$CV_1=\frac{2000}{10000}=0/2 \Rightarrow CV_1=0/20=\%20$

ضریب تغییرات برای نوع B　$CV_1=\frac{1000}{11000}=0/09 \Rightarrow CV_2=0/9=\%9$

نوع B بهتر است، زیرا هم میانگین طول عمر آن بیشتر است و هم ضریب تغییرات آن کوچکتر است.

ضریب چولگی: با اندازه‌گیری این شاخص تقارن یا عدم تقارن توزیع داده‌ها مشخص می‌شود این ضریب را با sk نمایش می‌دهند و آن را می‌توان از فرمول‌های زیر محاسبه کرد.

i)　ضریب چولگی اول پیرسون.　$sk_1=\frac{\bar{x}-MO}{S}$

ii)　ضریب چولگی دوم پیرسون.　$sk_2=\frac{3(\bar{x}-m)}{S}$

iii)　برای محاسبه دقیق‌تر می‌توان از رابطه‌ی روبرو استفاده کرد.　$sk=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$

که در اینجا $\mu_3=\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\bar{x})^3}{n}$ یا $\mu_3=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{n}$. (گشتاور سوم)

iiii) ضریب چولگی بر حسب چارک‌ها

$$sk = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

به تفسیر ضریب چولگی دقت کنید:

۱) اگر $sk = 0$ باشد توزیع داده‌ها متقارن است.

۲) اگر $sk > 0$، توزیع چوله به راست یا چولگی مثبت است.

۳) اگر $sk < 0$, توزیع چوله به چپ یا چولگی منفی است.

۴) اگر $|sk| > 0/5$، توزیع شدیدا چولگی دارد.

۵) اگر $0/1 < |sk| \le 0/5$، توزیع چولگی کمی دارد.

مثال۲۴: در جامعه‌ای معیارهای مرکزی و پراکندگی به شرح زیر است:
ضریب چولگی را حساب و تفسیر کنید.

$\bar{x} = 75, MO = 78\ , m = 77\ , \sigma = 15/25$

☑ **پاسخ:** طبق هر دو رابطه (i) و (ii) داریم:

$$sk_1 = \frac{\bar{x} - MO}{\sigma} = \frac{75 - 78}{15/25} = -0/19 \quad \Rightarrow |sk_1| = 0/19$$ چولگی منفی و خفیف است.

$$sk_2 = \frac{3(\bar{x} - m)}{\sigma} = \frac{3(75 - 77)}{15/25} = -0/39 \Rightarrow |sk_2| = 0/39$$ چولگی منفی و خفیف است.

مثال۲۵: اگر $N = 1000$ ، $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3 = 7000$ و واریانس جامعه ۹ باشد ضریب چولگی کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳۳ ۳) ۰/۴۲ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق رابطه (iii):

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n} = \frac{7000}{1000} = 7 \ \Rightarrow\ sk = \frac{7}{3^3} = \frac{7}{27} = 0/25$$

ضریب کشیدگی گشتاوری: بلندی یا کوتاهی نمودار داده‌ها را نسبت به توزیع نرمال کشیدگی می‌نامند ضریب کشیدگی گشتاوری را با E نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

$$\mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^4}{N} \quad \text{یا} \quad \mu_4 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^4}{N}$$

تفسیر ضریب کشیدگی:

۱) در توزیع نرمال استاندارد $E = 0$ بوده و در واقع $\frac{m_4}{S^4}$ برابر با ۳ می‌باشد.

۲) اگر $E < 0$ باشد بلندی توزیع، کوتاه‌تر از بلندی توزیع نرمال استاندارد است.

۳) اگر $E > 0$ باشد بلندی توزیع، بلندتر از بلندی توزیع نرمال استاندارد است.

۴) اگر $|E| < 0/1$ باشد توزیع تقریباً نرمال استاندارد است.

۵) اگر $|E| > 0/5$ باشد توزیع با توزیع نرمال استاندارد اختلاف زیادی دارد.

مثال۲۶: در جامعه‌ای به حجم $n = 10$ پس از محاسبات لازم کمیت‌های زیر بدست آمده است. ضریب کشیدگی توزیع کدام است؟

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^4 = 35 \quad , \quad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 10$$

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵− ۴) ۰/۴−

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$m_4 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^4 = \frac{35}{10} = 3/5$$

$$S^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{10}{10} = 1 \quad \Rightarrow \quad S^4 = 1$$

$$E = \frac{m_4}{S^4} - 3 = \frac{3/5}{1} - 3 = 0/5$$

مثال۲۷: ضریب کشیدگی یک جامعه ۰/۶− است جامعه مورد مطالعه:

۱) دارای چولگی فاحش است. ۲) تفاوت اندک است. ۳) تفاوتی ندارد. ۴) تفاوت فاحش است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»، طبق خاصیت (۵) از تفسیر کشیدگی تفاوت فاحش است.

تستهای طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ یک تابع توزیع احتمال با میانگین $\bar{x}$ در نظر می‌گیریم. به ازای هر عدد حقیقی a تابع h را با ضابطه $h(a)=E[(x-a)^2]$ تعریف می‌کنیم. کمترین مقدار $h(a)$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۳)

۱) $E[(x-\bar{x})^2]$ ۲) $E(x^2)$ ۳) $E[\frac{(x-\bar{x})^2}{2}]$ ۴) $E[(x-\frac{\bar{x}}{2})^2]$

۲ـ براساس یک نمونه ۵۰ تایی اطلاعات زیر حاصل شده است میانه داده‌های زیر کدام است؟ (مؤلف)

طبقات	۱-۴	۵-۸	۹-۱۲	۱۳-۱۶	۱۷-۲۰	۲۱-۲۴
فراوانی	۴	۶	۱۲	۱۵	۱۰	۳

۱) ۱۳/۳ ۲) ۱۴/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۳ـ براساس یک نمونه n تایی از یک توزیع که دارای چولگی خفیف می‌باشد. میانگین $\bar{X}=17/46$ و میانه $me=19/04$ و $m_o=21$ حاصل شده است حال کدام گزینه صحیح است؟ (مؤلف)

۱) توزیع دارای چولگی منفی است.

۲) توزیع دارای چولگی مثبت است.

۳) توزیع دارای شکل متقارن است.

۴) توزیع دارای چولگی است ولی مثبت یا منفی آن را نمی‌توان با این اطلاعات معین کرد.

۴ـ فرض کنید مقادیر زیر در یک نمونه ۱۰ تایی مشاهده شده است مقدار چارک سوم این داده‌ها کدام است؟ (مؤلف)

۴ ۳ ۱ ۳ ۱ ۲ ۴ ۳ ۵ ۶

۱) ۴/۷۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۴/۲۵ ۴) ۴

۵ـ فرض می‌کنیم داده‌های دسته‌بندی شده براساس یک نمونه ۵۰ تایی حاصل شده است. میانه داده‌های زیر کدام است؟ (مؤلف)

طبقات	۴-۷	۸-۱۱	۱۲-۱۵	۱۶-۱۹	۲۰-۲۳
فراوانی	۲	۸	۱۴	۲۰	۶

۱) ۱۶/۵ ۲) ۱۵/۵ ۳) ۱۵/۷ ۴) ۱۳

۶ـ اگر میانگین داده‌های $2x_1-3$ و $2x_2-3$ و ... و $2x_{20}-3$ برابر با ۲۹ باشد حاصل $\sum x_i$ کدام است؟ (مؤلف)

۱) ۲۸۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

۷ـ وزن ۱۰ نفر به صورت زیر است دامنه تغییرات کدام است؟ (مؤلف)

۸۱ و ۸۲ و ۷۹ و ۷۴ و ۷۲ و ۶۵ و ۷۱ و ۶۰

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

۸ـ حاصل $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$ کدام است؟ (مؤلف)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹ـ حاصل $\sum_{i=1}^{n}|x_i-m|$ همواره: (مؤلف)

۱) حداقل است. ۲) حداکثر است. ۳) صفر است. ۴) هیچکدام

۱۰ـ در توزیع‌های متقارن ضریب کشیدگی برابر است با: (مؤلف)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل اول

۱ـ گزینه «۱» یکی از مهمترین خصوصیات میانگین ($\overline{x}$ یا μ یا $E(x)$) بصورت زیر مطرح می‌شود:

$$\text{میانگین مجذور انحرافات از میانگین} = E\left|(x-\overline{x})^{۲}\right| = \min$$

۲ـ گزینه «۱» ابتدا مقدار $\frac{n}{۲}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$n=\sum f_i = ۵۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}=۲۵$$

$$Me = L + \left(\frac{\frac{n}{۲}-g_{i-۱}}{f_i}\right).w = ۱۲/۵ + \left(\frac{۲۵-۲۲}{۱۵}\right).۴ = ۱۳/۳$$

۳ـ گزینه «۱»

$Mo > Me > \overline{X} \Rightarrow$ چولگی منفی است.

۴ـ گزینه «۳» ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم: ۶ و ۵ و ۴ و ۴ و ۳ و ۳ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱

$$(n+۱)p = ۱۱\times\frac{۳}{۴} = ۸/۲۵ \Rightarrow \begin{cases} K=۸ \\ w=۰/۲۵ \end{cases}$$

$$(۱-w)x_K = wx_{K+۱} = ۰/۷۵\times۴ + ۰/۲۵\times۵ = ۴/۲۵$$

۵ـ گزینه «۳»

$$Me = L + \left(\frac{\frac{n}{۲}-g_{i-۱}}{f_i}\right).w = ۱۵/۵ + \left(\frac{۲۵-۲۴}{۲۰}\right).۴ = ۱۵/۷$$

۶ـ گزینه «۲»

$$۲\overline{X}-۳=۲۹ \Rightarrow ۲\overline{X}=۳۲ \Rightarrow \overline{X}=۱۶ \Rightarrow \sum X_i = ۲۰\times۱۶ = ۳۲۰$$

۷ـ گزینه «۳»

$$R = \max - \min + \alpha = ۸۲ - ۶۰ + ۱ = ۲۳$$

۸ـ گزینه «۱» همواره حاصل $\sum(x_i-\overline{x})=۰$ است.

۹ـ گزینه «۱»

۱۰ـ گزینه «۴»

آزمون فصل اول

۱ـ کدام یک پارامتر مرکزی محسوب نمی‌شود؟

۱) میانگین ۲) میانه ۳) مد یا نما ۴) واریانس

۲ـ برای یک توزیع خفیف چوله، میانه برابر ۴۰ و نما برابر ۳۰ می‌باشد، میانگین کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۸ ۳) ۲۷ ۴) ۴۵

۳ـ در کدام توزیع، میانه کوچکتر از نما است؟

۱) متقارن ۲) چولگی مثبت ۳) چولگی منفی ۴) هیچکدام

۴ـ متوسط رشد قیمت کالایی در چهار سال متوالی به صورت زیر به دست آمده است:
۲/۸ و ۲/۷ و ۲/۱۵ و ۲/۱ میانگین رشد قیمت سالانه کدام است؟

۱) ۲/۷۱۷ ۲) ۲/۴۳۷ ۳) ۲/۴۱۷ ۴) ۲/۱۵

۵ـ هواپیمایی یک فاصله ۸۰۰ کیلومتری را می‌پیماید. اگر این هواپیما ثلث اول و سوم را با سرعت ۲۵۰ کیلومتر و ثلث دوم فاصله را با سرعت ۳۰۰ کیلومتر در ساعت طی کند متوسط سرعت این هواپیما چقدر است؟

۱) ۲۷۰/۱۲ ۲) ۲۶۴/۷۱ ۳) ۳۵۲/۱ ۴) ۴۲۰/۸۷

۶ـ اگر در آزمون آمار اکثریت دانش‌آموزان نمره خوب و قابل قبولی کسب کرده‌اند شکل توزیع نمرات چگونه خواهد بود؟

۱) نرمال ۲) دو نمایی ۳) دارای چولگی منفی ۴) دارای چولگی مثبت

۷ـ با استفاده از جدول توزیع فراوانی زیر مقدار میانه چیست؟

حدود	[۰,۱۵)	[۱۵,۳۰)	[۳۰,۴۵)	[۴۵,۶۰)	[۶۰,۷۵)
فراوانی	۱۵	۱۳	۸	۲	۲

۱) ۱۸/۵ ۲) ۲۸/۷۷ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۰/۷۷

۸ـ در جدول زیر چارک اول کدام است؟

$C-L$	۵۰−۵۹	۶۰−۶۹	۷۰−۷۹	۸۰−۸۹	۹۰−۹۹	۱۰۰−۱۰۹	۱۱۰−۱۱۹
f_i	۳	۱۰	۱۴	۶۰	۱	۱۰	۲

۱) ۸۷/۰۸ ۲) ۷۸/۰۷ ۳) ۷۸/۵۷ ۴) ۷۷/۰۸

۹ـ برای داده‌های ۴ و ۲ و ۱۰ و ۹ و ۸ و ۶ و ۵ و ۴، صدک بیستم کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵/۲ ۳) ۴/۸ ۴) صفر

۱۰ـ چند درصد داده‌ها بین $(\mu-۳\sigma\ ,\ \mu+۳\sigma)$ قرار دارند (توزیع داده‌ها دارای چولگی کم است)؟

۱) ٪۶۸ ۲) ٪۹۵ ۳) ٪۹۹ ۴) ٪۱۷

فصل دوم

« احتمال یا قوانین شانس »

این فصل به دو بخش قوانین شمارش و احتمال تقسیم می‌شود. در بخش اول با روشها و قوانین مختلف شمارش آشنا می‌شویم که در بخش احتمال در محاسبه تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد اعضای پیشامدها استفاده می‌شوند. قوانین شمارش خود به طور کلی به سه دسته جایگشتها، ترتیبها و ترکیبها تقسیم می‌شود.

قوانین شمارش

اصل ضرب (اصل اساسی شمارش)

اگر عملی به n_1 طریق و برای هر کدام از آنها عمل دومی به n_2 طریق و ... و عمل k ام به n_k طریق انجام شود. این k عمل با هم به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق انجام می‌پذیرد.

مثال ۱: با حروف کلمه تهران چند کلمه چهارحرفی می‌توان نوشت؟

الف) اگر تکرار حروف مجاز باشد.

۱) ۶۰۰ ۲) ۶۲۵ ۳) ۷۰۵ ۴) ۱۲۰

ب) اگر تکرار حروف مجاز نباشد.

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۶۱۰

☑ **پاسخ:**

الف: گزینه «۲» کلمه تهران ۵ حرف مختلف دارد برای هر حرف ۵ انتخاب وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد حالات برابر است با:

۵×۵×۵×۵=۶۲۵

ب: گزینه «۱» چون تکرار حروف مجاز نیست برای حرف اول ۵ انتخاب برای حرف دوم ۴ انتخاب برای حرف سوم ۳ انتخاب و برای حرف چهارم ۲ انتخاب و برای حرف پنجم یک انتخاب وجود دارد بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

۵×۴×۳×۲×۱=۱۲۰

مثال ۲: با ارقام {۵،۴،۳،۲،۱} چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

الف) تکرار ارقام مجاز است.

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲۵ ۴) ۱۵۰

ب) تکرار ارقام مجاز نیست.

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۰۰

☑ **پاسخ:** نوشتن یک عدد سه رقمی شامل انتخاب رقم صدگان، رقم دهگان و رقم یکان است بنابراین:

الف) گزینه «۳» رقم صدگان می‌تواند یکی از ارقام ۱ تا ۵ به ۵ طریق و رقم دهگان نیز مانند رقم صدگان به ۵ طریق و رقم یکان نیز به ۵ طریق می‌تواند از بین ارقام {۱،۲،۳،۴،۵} انتخاب داشته باشد.

○ ○ ○
۵ × ۵ × ۵ = ۱۲۵

ب) گزینه «۳» رقم صدگان یکی از ارقام ۱ تا ۵ به ۵ طریق رقم دهگان به ۴ طریق (ارقام باقیمانده) و رقم یکان به ۳ طریق می‌تواند انتخاب شود.

○ ○ ○
۵ × ۴ × ۳ = ۶۰

مثال ۳: با ارقام {۵،۴،۳،۲،۱،۰} چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

☑ **پاسخ:** در اینجا ابتدا رقم یکان به ۳ طریق (ارقام ۱ یا ۳ یا ۵) انتخاب می‌شودسپس به غیر از صفر و عدد انتخاب شده در رقم یکان رقم صدگان می‌تواند انتخاب شود (۴ طریق) و در رقم دهگان نیز ۴ طریق ممکن است اعداد باقیمانده انتخاب شوند بنابراین تعداد حالات برابر است با:

○ ○ ○
۴ × ۴ × ۳ = ۴۸

مثال ۴: چند عدد سه رقمی وجود دارد؟

۱) ۸۰۰ ۲) ۹۰۰ ۳) ۹۹۹ ۴) ۱۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» زمانی که ارقامی را مشخص نکرده به طور کلی ارقام {۹،...،۲،۱،۰} را در نظر می‌گیریم در اینجا چون تکرار مجاز است. ابتدا در رقم صدگان ۹ انتخاب به جز ۱ عدد صفر داریم و در رقم دهگان و یکان علاوه بر ۹ رقم قبلی صفر نیز اضافه می‌شود:

۹×۱۰×۱۰=۹۰۰

مثال ۵: چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ وجود دارد؟

۱) ۱۲۵۶ ۲) ۱۵۷۶ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۲۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» توجه کنید اعدادی مضرب ۵ هستند که رقم یکان آنها صفر یا ۵ باشد. پس برای یکان دو انتخاب (۰ یا ۵) در رقم هزارگان به جزء صفر، ۹ انتخاب (ارقام ۱ تا ۹) و در رقم صدگان و دهگان ۱۰ انتخاب داریم، علاوه بر ارقام ۱ تا ۹، صفر نیز اضافه می‌شود، بنابراین تعداد اعداد چهار رقمی مضرب ۵ برابر است با:

۹×۱۰×۱۰×۲=۱۸۰۰

اصل جمع: فرض کنید کاری را بتوان با دو عمل A یا B انجام داد. اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام پذیرند و این دو عمل نتوانند همزمان اتفاق بیفتد آنگاه این کار به $m+n$ طریق انجام می‌پذیرد.

مثال ۶: از بین ارقام {۹،۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱،۰} چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام و بزرگتر از ۴۱۰ می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۵۰۴ ۲) ۵۶۷ ۳) ۷۲۰ ۴) ۲۷۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اعداد بین ۴۱۱ تا ۴۲۰ + اعداد بین ۴۲۱ تا ۵۰۰ + اعداد بزرگتر از ۵۰۰

=۴×۸×۷+۱×۶×۷+۱×۱×۶=۲۷۲

مثال ۷: به چند طریق می‌توان از بین ۳ دانشجوی صنایع، ۴ دانشجوی الکترونیک و ۲ دانشجوی کامپیوتر کمیته‌ای ۲ نفری انتخاب کرد به طوری که اعضاء کمیته هم رشته نباشند؟

۱) ۲۶ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۱» طبق اصل ضرب به $12 = 3 \times 4$ طریق از رشته صنایع و رشته الکترونیک می‌توان دو دانشجو انتخاب کرد از رشته کامپیوتر و صنایع $6 = 2 \times 3$ طریق و از رشته الکترونیک و کامپیوتر $8 = 2 \times 4$ طریق بنابراین طبق اصل جمع کمیته دو نفره را به $26 = 6 + 8 + 12$ طریق می‌توان انتخاب کرد.

تبدیل یا جایگشت: حالاتی را که می‌توان اشیاء یک مجموعه را در کنار یکدیگر قرار داد جایگشت یا تبدیل گویند.

جایگشتهای مهم عبارتند از:

جایگشت خطی

جایگشت دایره‌ای

جایگشت یک در میان

جایگشت با تکرار

جایگشت خطی: اگر n عضو متمایز را بخواهیم در کنار یکدیگر در یک خط (صف) قرار دهیم تعداد جایگشتهای مختلف این عناصر برابر است با: $n(n-1)(n-2)...(2)(1) = n!$

مثلاً ۴ نفر را به !۴ طریق می‌توان در یک صف مرتب کرد.

مثال ۸: به چند طریق می‌توان ۳ دانشجوی رشته صنایع و ۴ دانشجوی رشته الکترونیک را در کنار یکدیگر در یک صف مرتب کرد به طوری که دانشجویان هم رشته در کنار یکدیگر باشند؟

۱) ۴۸ ۲) ۲۲۴ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۸۸

پاسخ: گزینه «۴» ۳ دانشجوی رشته صنایع را یک گروه (A) و ۴ دانشجوی رشته الکترونیک را گروهی دیگر (B) فرض می‌کنیم. اکنون این دو گروه به !۲ طریق جابجایی دارند، اما در بین گروه دانشجویان صنایع !۳ و گروه دانشجویان الکترونیک !۴ جایگشت وجود دارد. بنابراین تعداد کل حالتها برابر است با:

$2! \times 4! \times 3! = 288$

مثال ۹: به چند طریق می‌توان ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه را در یک خط مرتب کرد به طوری که مهره‌های سفید در کنار یکدیگر باشند؟ (همه مهره‌ها متمایزند)

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۱» مهره‌های سفید را یک گروه فرض می‌کنیم بنابراین اکنون ۴ مهره داریم با !۴ جایگشت اما خود مهره‌های سفید نیز به !۲ طریق جابجایی دارند بنابراین تعداد حالتها برابر است با: $4! \times 2! = 48$

مثال ۱۰: به چند طریق می‌توان ۴ فوتبالیست و ۴ والیبالیست را در یک صف مرتب کرد به طوریکه فوتبالیست‌ها در کنار یکدیگر و در سمت چپ والیبالیست‌ها قرار گیرند؟

۱) $2\times(4!)^2$ ۲) $(4!)^2$ ۳) $4!$ ۴) $\frac{4!}{2}$

پاسخ: گزینه «۲» ۴ فوتبالیست را یک دسته اختیار می‌کنیم اما توجه کنید که فوتبالیست‌ها باید در سمت چپ والیبالیست‌ها قرار گیرند. بنابراین فقط !۴ جایگشت برای والیبالیست‌ها و !۴ جایگشت برای فوتبالیستها داریم. بنابراین تعداد حالات برابر است با: $4! \times 4!$

مثال ۱۱: شخصی با ۵ نفر از دوستانش وارد اتاق می‌شود اگر خودش نشست بقیه به چند صورت می‌توانند در کنار او (در ردیف) بنشینند؟

۱) !۵ ۲) !۶ ۳) !۴ ۴) !۷

پاسخ: گزینه «۲» برای خود شخص ۶ حالت نشستن و برای ۵ نفر دوستانش !۵ طریق جایگشت داریم بنابراین:

تعداد کل حالات $= 6 \times 5! = 6!$

جایگشت دایره‌ای (دوری): تعداد حالاتی که می‌توان n عنصر متمایز را به صورت دایره‌ای در کنار یکدیگر قرار دارد برابر است با:

$(n-1)!$

مثلاً ۵ نفر را به $(5-1)! = 4!$ طریق می‌توان دور یک میز گرد مرتب کرد.

مثال ۱۲: به چند طریق می‌توان ۲ تهرانی، ۳ اصفهانی و ۴ یزدی را دور یک میز گرد مرتب کرد به طوری که همشهریها پهلوی یکدیگر قرار بگیرند؟

پاسخ: ابتدا تهرانی‌ها، اصفهانی‌ها و یزدی‌ها را به صورت گروهی فرض می‌کنیم اکنون این ۳ گروه به !۲ طریق مختلف دور میز مرتب می‌شوند. اما مابین خود گروهها نیز جایگشت داریم. برای تهرانی‌ها !۲ برای اصفهانی‌ها !۳ و برای یزدی‌ها !۴ جایگشت وجود دارد. بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$2!\times 2!\times 3!\times 4!$

جایگشت یک در میان: اگر بخواهیم m عنصر از یک گروه و n عنصر از گروهی دیگر را به صورت یک در میان در یک خط مرتب کنیم دو حالت وجود دارد:

اگر $m = n \Rightarrow$ تعداد حالتها $= 2\times m!\times n!$

اگر $m = n+1 \Rightarrow$ تعداد حالتها $= m!\times n!$

مثال ۱۳: در یک مهدکودک ۱۰ پسر و ۱۰ دختر را به صورت تصادفی روی صندلی‌های یک ردیف می‌نشانیم چند حالت وجود دارد اگر بخواهیم کودکانی که در کنار یکدیگر نشسته‌اند جنسیت یکسانی نداشته باشند؟

۱) $2\times(10!)^2$ ۲) $10!\times10!$ ۳) $10!$ ۴) $\frac{10!}{2}$

پاسخ: گزینه «۱» در اینجا با جایگشت یک در میان روبرو هستیم تعداد دو گروه برابر است. ابتدا دو حالت وجود دارد که از کدام گروه شروع کنیم (پسر یا دختر) سپس برای هر گروه !۱۰ جایگشت وجود دارد پس تعداد حالتها برابر است با:

$2\times 10!\times 10! = 2\times(10!)^2$

مثال ۱۴: به چند طریق می‌توان ۳ پسر بچه و ۲ دختر بچه را به صورت یک در میان در یک صف مرتب کرد؟

۱) $2\times3!\times2!$ ۲) $3!\times2!$ ۳) $2\times(3!)^2$ ۴) $2\times(2!)^2$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا باید از گروه پسر بچه‌ها شروع کنیم تا بتوانیم حالت یک در میان ایجاد کنیم. (پسر دختر پسر دختر پسر) در اینجا مانند قبل ۲ حالت وجود ندارد. اکنون پسرها به !۳ طریق و دخترها به !۲ طریق جایگشت دارند. بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$3!\times2!$

جایگشت با تکرار: تعداد جایگشتهای مختلف n عنصر که n_1 تای آن از نوع اول، n_2 تای آن از نوع دوم و ... و n_k تای آن از نوع k اُم می‌باشد برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\dots n_k!} \quad ; \quad n_1+n_2+\dots+n_k=n$$

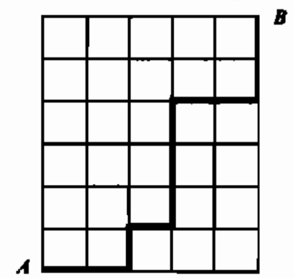
مثال ۱۵: ***با حروف کلمه Statistics چند کلمه ۱۰ حرفی مختلف می‌توان ساخت؟***

۱) $\frac{10!}{3!}$ ۲) $\frac{10!}{6!}$ ۳) $\frac{10!}{72!}$ ۴) $\frac{10!}{18!}$

پاسخ: گزینه «۳» کلمه شامل ۱۰ حرف مختلف است پس تعداد کل جایگشتها برابر با !۱۰ است اما در اینجا حالتهای تکراری داریم مثلاً زمانی که جای "S" یا "t" یا "I" عوض می‌شود. جایگشت جدیدی بوجود نمی‌آید بنابراین تعداد کل حالتها برابر است با:

$$\frac{10!}{3!\times 3!\times 2!}$$

مثال ۱۶: ***شخصی با حرکت‌های قائم و افقی (به سمت بالا و جلو) می‌خواهد از A به B برود به چند طریق می‌تواند این عمل را انجام دهد (اول قائم بعد افقی یا بالعکس خط پررنگ یک مثال از A به B رسیدن است).***



۱) ۴۰۰
۲) ۵۶۰
۳) ۵۰۰
۴) ۴۶۲

پاسخ: گزینه «۴» تعداد کل جایگشتهای مسیرهای قائم و افقی را بر تعداد حالات تکراری تقسیم می‌کنیم.

$$\text{تعداد حالات} = \frac{(n+k)!}{n!k!}=\frac{(5+6)!}{5!6!}=462$$

ترتیب: انتخاب r شیء از n شیء زمانی که ترتیب انتخاب یا قرار گرفتن r شیء در کنار یکدیگر مهم باشد ترتیب نام دارد.

الف ـ اگر تکرار اشیاء مجاز نباشد تعداد راههای ممکن برابر است با: $P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$

ب ـ اگر تکرار اشیاء مجاز باشد تعداد راههای ممکن برابر است با: n^r

مثال ۱۷: ***به چند طریق می‌توان در بین ۵ نفر، جوایز اول و دوم و سوم تقسیم شود؟***

پاسخ: انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر که می‌توان ترتیب دادن جوایز به آنها را تغییر داد.

$$P_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=60$$

مثال ۱۸: ***برای باز کردن یک قفل مرکزی، انتخاب ۴ عدد مناسب از اعداد مختلف یک رقمی بدون تکرار نیاز است. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟***

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۲۴ ۴) ۶۱۵۴

پاسخ: گزینه «۱» انتخاب ۴ رقم از ارقام $\{0,1,2,\dots,9\}$ که در اینجا باید ترتیب رعایت شود.

$$P_{10}^4=\frac{10!}{(10-4)!}=5040$$

مثال ۱۹: ***فرض کنید عملیات مونتاژ قطعه‌ای در ۵ مرحله انجام می‌گیرد که به هر ترتیبی انجام می‌گیرد اگر از لحاظ تجربی بخواهیم زمان مونتاژها را با یکدیگر مقایسه کنیم چند ترتیب مختلف را باید آزمایش کرد؟***

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۴۰ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۱» مرتب کردن ۵ تایی از ۵ مرحله مختلف.

$$P_5^5=\frac{5!}{(5-5)!}=120$$

ترکیب: اگر در انتخاب r شیء از n شیء ترتیب انتخاب یا ترتیب قرارگرفتن آنها در کنار یکدیگر مهم نباشد در این صورت به این جایگشت ترکیب گویند.

الف ـ اگر تکرار عناصر مجاز نباشد تعداد راههای ممکن برابر است با: $C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

ب ـ اگر تکرار عناصر مجاز باشد تعداد راههای ممکن برابر است با: $C_n^r=\binom{n+r-1}{r}$

مثال ۲۰: ***از جعبه‌ای شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز به چند طریق می‌توان ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز انتخاب کرد؟***

پاسخ: $\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}=40$

مثال ۲۱: ***به چند طریق می‌توان از یک گروه ۱۲ نفره یک تیم حداقل ۱۰ نفره انتخاب کرد؟***

۱) ۶۶ ۲) ۷۸ ۳) ۱۲ ۴) ۷۹

پاسخ: گزینه «۴» به کلمه حداقل توجه شود.

$$\binom{12}{10}+\binom{12}{11}+\binom{12}{12}=66+12+1=79$$

مثال ۲۲: ***دانشجویی در یک امتحان بایستی به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال پاسخ دهد. او به چند طریق می‌تواند سؤالها را انتخاب کند، اگر لازم باشد به حداقل ۳ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ دهد؟***

۱) ۵۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۱۶۲

پاسخ: گزینه «۲» چون باید به حداقل ۳ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ دهد بنابراین می‌تواند ۴ سؤال یا ۵ سؤال از سؤالات اول را نیز پاسخ دهد.

$$\binom{5}{3}\binom{5}{4}+\binom{5}{4}\binom{5}{3}+\binom{5}{5}\binom{5}{2}=110$$

مثال ۲۳: ***فردی ۸ دوست دارد که می‌خواهد ۵ نفر آنها را به یک میهمانی دعوت کند چند انتخاب وجود دارد اگر دو نفر از دوستان وی با هم اختلاف داشته باشند و نخواهند با هم در میهمانی شرکت کنند؟***

۱) ۲۶ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۲

پاسخ: گزینه «۲» کل حالات منهای حالاتی که ۲ نفر با هم باشند یا، هیچکدام را دعوت نمی‌کند و یا یکی از آن دو نفر را دعوت می‌کند.

$$\binom{8}{5}-\binom{2}{2}\binom{6}{3}=36 \quad \text{یا} \quad \binom{2}{0}\binom{6}{5}+\binom{2}{1}\binom{6}{4}=36$$

مثال ۲۴: یک رئیس، یک خزانه‌دار و یک منشی که افراد مختلفی هستند را از یک مجموعه ۱۰ نفری انتخاب می‌کنیم این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است اگر:

الف ـ هیچ محدودیتی نباشد.

۱) ۶۷۲ ۲) ۷۲۰ ۳) ۳۸۴ ۴) ۵۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا ۳ نفر را برای این ۳ پست به $\binom{10}{3}$ طریق انتخاب کرده سپس به !۳ حالت این سه شغل را به آنها می‌دهیم:

$$\binom{10}{3}\times 3! = 720$$

ب ـ A و B با هم انتخاب نشوند.

۱) ۳۸۴ ۲) ۶۷۲ ۳) ۴۵۲ ۴) ۵۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» یا فقط A یا فقط B یا هیچکدام. یا، کل حالات منهای حالاتی که A و B با هم انتخاب شوند.

$$\left[\binom{2}{0}\binom{8}{3}+\binom{2}{1}\binom{8}{2}\right]\times 3! = 672$$

$$720-\binom{2}{2}\binom{8}{1}3! = 672$$

ج ـ C و D با هم انتخاب شوند و یا هیچکدام انتخاب نشوند.

۱) ۳۸۴ ۲) ۵۲۵ ۳) ۶۷۲ ۴) ۵۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$\binom{2}{2}\binom{8}{1}\times 3!+\binom{2}{0}\binom{8}{3}\times 3! = 384$$

د ـ E حتماً انتخاب شود.

۱) ۱۱۲ ۲) ۲۱۶ ۳) ۳۲۲ ۴) ۵۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» به ۱ حالت E را انتخاب کرده ۲ نفر باقیمانده از ۹ نفر دیگر.

$$\binom{1}{1}\binom{9}{2}\times 3! = 216$$

هـ ـ F فقط در صورتی که رئیس باشد انتخاب شود.

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۱۶ ۳) ۵۷۶ ۴) ۶۷۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» یعنی F یا انتخاب نشود یا اگر انتخاب شد رئیس است.

$$\binom{1}{0}\binom{9}{3}\times 3! + \binom{1}{1}\binom{9}{2}\times 2! = 576$$

مثال ۲۵: به چند طریق می‌توان ۴ اسکی‌باز را با سه تقاله به ظرفیتهای به ترتیب ۱ نفره ۲ نفره و ۳ نفره به بالای قله کوه برد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۴۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» حالتهای زیر ممکن است:

۳ نفر را انتخاب کرده در تقاله سه نفره قرار می‌دهیم $\left(\binom{4}{3}\right)$ و نفر دیگر در یکی از تقاله‌های باقیمانده (۲ حالت) $\binom{4}{3}\times 2 = 8$.

۲ نفر را انتخاب کرده در تقاله سه نفره و ۲ نفر باقیمانده یا در تقاله دو نفره (۱ حالت) یا در هر تقاله با ظرفیت یک نفره یک نفر (۲ حالت)

$$\binom{4}{2}\times 1+\binom{4}{2}\times 2 = 18$$

یک نفر را انتخاب کرده در تقاله ۳ نفره و ۲ نفر در تقاله ۲ نفره و ۱ نفر در تقاله یک نفره قرار می‌دهیم $\binom{4}{1}\times\binom{3}{2} = 12$.

تعداد کل حالات برابر است با: $8+18+12=38$

چند رابطه مهم:

۱) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۲) $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

۳) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

۴) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots$

۵) $r!\,C_n^r=P_n^r$

۶) $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\times 2^{n-1}$

۷) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

۸) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$

۹) $\binom{n+m}{r}=\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\dots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}$

۱۰) $i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1}$

مثال ۲۶: به چند طریق می‌توان از یک گروه ۸ نفره یک تیم حداقل ۲ نفره انتخاب کرد؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۲۵۵ ۳) ۲۴۸ ۴) ۲۴۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق رابطه ۳:

$$\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\dots+\binom{8}{8}=2^8-\binom{8}{0}-\binom{8}{1}=256-1-8=247$$

مثال ۲۷: با استفاده از ۱۰ مهره سفید و ۷ مهره سیاه چند مجموعه مهره می‌توان ساخت که دقیقاً ۲ یا ۴ مهره سفید در آنها باشد؟

۱) ۳۰۰ ۱) $2^7\times 210$ ۳) $2^7\times 255$ ۴) $2^7\times 550$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\binom{10}{2}\left[\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\dots+\binom{7}{7}\right]+\binom{10}{4}\left[\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\dots+\binom{7}{7}\right]=\left[\binom{10}{2}+\binom{10}{4}\right]2^7=255\times 2^7$$

چند قضیه مهم:

۱ـ تعداد حالات مختلف تقسیم n عنصر متمایز در k دسته به طوری که در دسته اول n_1 عضو، در دسته دوم n_2 عضو و ... و در دسته kام n_k عضو قرار گیرد، برابر است با:

$$\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}\quad;\quad n_1+n_2+\dots+n_k=n$$

مثال ۲۸: اگر بخواهیم ۸ معلم جدید را بین ۴ مدرسه تقسیم کنیم چنانچه به هر مدرسه لازم باشد دو معلم اختصاص داده شود به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

۱) ۶۵۰۰ ۲) ۳۷۴۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۲۸۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» طبق قضیه ۱:

$$\binom{8}{2,2,2,2}=2520$$

مثال ۲۹: در یک سیستم الکترونیکی، برای ارسال ۱۰۰۰ پیغام به چند کلید احتیاج داریم (هر کلید فقط می‌تواند مقدار صفر یا یک را بگیرد)؟

۱) ۵۰۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۳» از آنجایی که هر کلید می‌تواند دو حالت صفر و یا یک را بگیرد برای ارسال ۱۰۰۰ پیغام به ۱۰ کلید احتیاج داریم $1000 < 1024 = 2^{10}$ (۱۰ اولین عددی است که اگر ۲ را به توان آن عدد برسانیم بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ می‌شود).

۲ـ تعداد حالات تقسیم یا توزیع n توپ متفاوت به r ظرف برابر با r^n است زیرا هر توپ می‌تواند در هر یک از r ظرف قرار داده شود (ترتیب مهم نیست).

$$r\times r\times r\times\ldots\times r=r^n$$

مثال ۳۰: به چند طریق می‌توان ۴ توپ متفاوت را در ۳ ظرف متفاوت بدون محدودیت تقسیم کرد؟

پاسخ: توپ اول به ۳ طریق ، توپ دوم به ۳ طریق و توپ سوم و چهارم نیز به ۳ طریق می‌توانند در ظرفها قرار بگیرند.

$$3\times3\times3\times3=3^4$$

۳ـ تعداد حالات تقسیم n توپ مشابه (نامتمایز) در r ظرف متفاوت برابر است با:

$$\binom{n+r-1}{n}=\binom{n+r-1}{r-1}$$

مثال ۳۱: یک آسانسور از طبقه همکف با ۸ مسافر حرکت کرده و تا طبقه ششم همه را پیاده می‌کند. اگر مسافران از نظر مسئول آسانسور یکسان باشند به چند طریق مختلف :

الف) او می‌تواند شاهد پیاده شدن مسافران باشد.

ب) اگر ۵ نفر از مسافران مرد و ۳ نفر زن باشند به چند طریق او می‌تواند شاهد پیاده شدن مسافران باشد.

پاسخ:

الف) ۸ مسافر از نظر مسئول آسانسور یکسان هستند.

$$\binom{8+6-1}{6-1}=\binom{13}{5}=1287$$

ب)

$$\binom{5+6-1}{6-1}\cdot\binom{3+6-1}{6-1}=\binom{10}{5}\binom{8}{5}$$

مثال ۳۲: برای یک تابع n متغیره مانند $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ چند مشتق جزیی از مرتبه k ممکن است؟

۱) C_n^{k+n} ۲) C_n^k ۳) C_{n-1}^{k+n-1} ۴) C_{n-1}^{k-1}

پاسخ: گزینه «۳» می‌خواهیم k مشتق را بین n متغیر x_1 ، x_2 ، ... و x_n تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد حالات}=\binom{n+k-1}{n-1}$$

مثال ۳۳: به چند طریق می‌توان معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=30$ را با اعداد صحیح و غیرمنفی حل کرد، بطوریکه همگی مضرب ۳ باشند؟

۱) $\binom{15}{5}$ ۲) $\binom{34}{4}$ ۳) $\binom{14}{5}$ ۴) $\binom{14}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» اگر $y_i=\frac{x_i}{3}$ باشد، $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=10$ است پس تعداد حالات برابر با $\binom{14}{4}$ است.

مثال ۳۴: می‌خواهیم ۲۰ میلیون ریال پول را در ۴ فعالیت اقتصادی سرمایه‌گذاری کنیم هر سرمایه‌گذاری بایستی مضربی از یک میلیون ریال بوده و چنانچه بخواهیم در این فعالیتها سرمایه‌گذاری کنیم لازم است حداقل سرمایه‌گذاری ۲ و ۲ و ۳ و ۴ میلیون ریال در هر فعالیت انجام گیرد، به چند طریق این کار ممکن است اگر بخواهیم در همه فعالیتها سرمایه‌گذاری کنیم؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۲۲۰ ۳) ۳۴۰ ۴) ۴۵۰

پاسخ: گزینه «۲» در ابتدا باید $11=4+2+2+3$ میلیون ریال در هر چهار فعالیت سرمایه‌گذاری کنیم (حداقل سرمایه‌گذاری) سپس باقیمانده سرمایه را یعنی ۹ میلیون ریال را بین ۴ فعالیت تقسیم کنیم.

$$\binom{9+4-1}{4-1}=\binom{12}{4}=220$$

۴ـ تعداد حالات مختلف توزیع n توپ متمایز در k ظرف متمایز به طوری که در هر ظرف می‌تواند بیش از یک توپ قرار گیرد و ترتیب توپها در ظرفها نیز مهم در نظر گرفته شود برابر است با :

$$P^n_{n+k-1}=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$$

و اگر بخواهیم در هر ظرف حداقل یک توپ قرار گیرد تعداد حالات برابر است با:

$$P^{n-k}_{n-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!}$$

مثال ۳۵: به چند طریق می‌توان ۵ پرچم متمایز را با رنگهای مختلف روی ۳ میله قرار داد؟

۱) $\frac{7!}{2!}$ ۲) $7!$ ۳) $\frac{8!}{2!}$ ۴) $3!\times5!$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\frac{(5+3-1)!}{(3-1)!}=\frac{7!}{2!}$$

۵ـ قضیه انطباق: اگر بخواهیم n توپ شماره‌گذاری شده از ۱ تا n را در n ظرف شماره‌گذاری شده از ۱ تا n قرار دهیم تعداد حالاتی که می‌توان این عمل را انجام داد بطوریکه شمارهٔ هیچ توپی با شماره ظرف قرار گرفته یکسان نباشد برابر است با:

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

مثال ۳۶: ۴ دعوتنامه برای ۴ نفر فرستاده می‌شود به چند طریق ممکن است دعوتنامه هیچکس به دست خودش نرسد؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۷۲

پاسخ: گزینه «۱» طبق قضیه ۵ :

روش اول: طبق رابطه گفته شده در قضیه ۵ :

$$4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=9$$

روش دوم:

حالاتی که دعوتنامه حداقل ۱ نفر به دست خودش برسد ـ کل حالات

$$4!-\binom{4}{1}-\binom{4}{2}-\binom{4}{3}-\binom{4}{4}=24-4-6-4-1=9$$

مثال ۳۷: پنج نفر کلاهشان را در وسط اطاق می‌اندازند. اگر آنها بخواهند به طور کاملاً تصادفی یک کلاه بردارند، به چند طریق فقط ۳ نفر از آنها کلاه خود را برمی‌دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۲»، به $\binom{5}{3}$ طریق سه نفر کلاه خود را بطور صحیح برمی‌دارند اکنون ۲ کلاه باقیمانده به ۱ طریق به صاحب کلاه نمی‌رسد:

$$\binom{5}{3}\times 1=10$$

احتمال

تعریف: آزمایشی را در نظر بگیرید که قبل از انجام آن پیش‌بینی قطعی نتیجه مقدور نباشد ولی با وجود اینکه نتیجه آزمایش از قبل معلوم نیست، مجموعه همه نتایج ممکن آن معلوم باشد، چنین آزمایشی را آزمایش تصادفی می‌نامند مانند پرتاب یک سکه، پرتاب یک تاس، تعیین جنسیت یک نوزاد و پرتاب متوالی یک سکه تا مشاهده یک شیر و ... .

تعریف: مجموعه تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گویند.

فضای نمونه پرتاب یک سکه $S=\{H,T\}$

فضای نمونه پرتاب یک تاس $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

فضای نمونه تعیین جنسیت یک نوزاد $S=\{g,b\}$

فضای نمونه پرتاب یک سکه تا مشاهده یک شیر $S=\{H,TH,TTH,...\}$

با توجه به مثال‌های بالا فضاهای نمونه به دو بخش گسسته و پیوسته تقسیم می‌شوند.

تعریف فضای نمونه گسسته

شامل دو حالت زیر است:

الف ـ فضای نمونه متناهی که تعداد اعضای آن متناهی است مانند فضای نمونه پرتاب یک سکه یا پرتاب یک تاس.

ب ـ فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر که یک مجموعه نامتناهی اما شمارش‌پذیر است مانند پرتاب یک سکه تا مشاهده یک شیر.

تعریف فضای نمونه پیوسته

اعضای آن به صورت یک فاصله از اعداد حقیقی یا یک سطح در فضای دو بعدی و یا ... است. مانند درجه حرارت بدن یک بیمار که یک فاصله بسته $[35,42]$ است.

تعریف: هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه را پیشامد گویند. پیشامدی که تنها دارای یک عضو باشد پیشامد ساده و پیشامدی با تعداد اعضای بیشتر از یک عضو را پیشامد مرکب گوئیم اگر پیشامدی شامل هیچ عضوی نباشد، آن را پیشامد محال یا تهی و پیشامدی که برابر فضای نمونه S است پیشامد حتمی نام دارد.

اعمال روی پیشامدها

اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند $A\cap B$ را اشتراک دو پیشامد A و B گوئیم و وقوع $A\cap B$ به معنای وقوع همزمان هر دو پیشامد A و B است.

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A\cup B$ را اجتماع دو پیشامد A و B گوئیم و وقوع $A\cup B$ به معنای وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A یا B است.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد A-B را تفاضل پیشامد B از A گوئیم و وقوع A-B به معنای وقوع «فقط A و نه B» است.

متمم یک پیشامد: پیشامد A' را متمم پیشامد A گوئیم و وقوع A' به معنای عدم وقوع پیشامد A است.

پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای $A_1,A_2,...,A_n$ را پیشامدهای ناسازگار گوئیم اگر وقوع همزمان هر دو پیشامد غیر ممکن باشد.

$$A_i\cap A_j=\phi\ ,\ i\neq j$$

تابع احتمال

تابع احتمال تابعی از فضای نمونه S به داخل مجموعه اعداد حقیقی R به صورت $P:S\to R$ است. به عبارت دیگر احتمال تابعی مانند P است که به هر پیشامد A از فضای نمونه S عدد حقیقی $P(A)$ را به گونه‌ای نسبت می‌دهد که در ۳ اصل موضوعه زیر صدق کند.

۱) $P(S)=1$

۲) برای هر پیشامد A در S و $P(A)\geq 0$

۳) اگر A_1 ، A_2 و ... دنباله‌ای نامتناهی از پیشامدهای ناسازگار باشند آنگاه:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

در اینجا مدل احتمال را بر روی فضاهای نمونه مختلف مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مدل احتمال بر روی فضای نمونه گسسته متناهی

مثال ۳۸: سکه‌ای را طوری ساخته‌اند که احتمال آمدن شیر سه برابر احتمال آمدن خط است اگر سکه را یکبار پرتاب کنیم احتمال آمدن شیر را بدست آورید.

S	H	T
P	3K	K

پاسخ: اگر احتمال آمدن خط را K فرض کنیم. احتمال آمدن شیر برابر با 3K خواهد بود.

$$P(S)=1\Rightarrow 3K+K=4K=1\Rightarrow K=\frac{1}{4}\Rightarrow P(H)=3K=\frac{3}{4}$$

مثال ۳۹: یک تاس به شکلی ساخته شده است که احتمال آمدن عدد زوج در آن دو برابر آمدن عدد فرد است اگر این تاس را یکبار پرتاب کنیم احتمال آمدن حداقل ۵ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{9}$

پاسخ: گزینه «۱» اگر به اعداد فرد شانس K داده شود برای اعداد زوج شانس 2K نسبت داده می‌شود.

S	1	2	3	4	5	6
P	K	2K	K	2K	K	2K

$$P(S)=1\Rightarrow K+2K+K+2K+K+2K=1\Rightarrow 9K=1\Rightarrow K=\frac{1}{9}$$

حال اگر A پیشامد مشاهده عدد حداقل ۵ باشد آنگاه $A=\{5,6\}$ و در نتیجه:

$$P(A)=P(5)+P(6)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

مدل احتمال یکنواخت: اگر در مثال‌های بالا نقاط فضای نمونه‌دارای شانس‌های مساوی باشند آنگاه احتمال وقوع هر پیشامد مانند A را در S با استفاده از رابطه زیر که به مدل احتمال یکنواخت معروف است محاسبه می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه } S}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}$$

مثال ۴۰: جعبه‌ای شامل ۳ توپ سفید، ۴ توپ سیاه و ۵ توپ قرمز است. یک توپ به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف ـ احتمال اینکه توپ انتخابی سفید باشد، را بدست آورید.

ب ـ احتمال اینکه توپ انتخابی سیاه باشد، را بدست آورید.

☑ **پاسخ:** W : توپ سفید و B : توپ سیاه

در اینجا فضای نمونه دارای $n(S)=۱۲$ عضو می‌باشد که شانس انتخاب همه توپ‌ها مساوی است. پس:

$$\text{الف}: P(W)=\frac{n(W)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}$$

$$\text{ب}: P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۲}$$

مثال ۴۱: تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه اعداد رو شده یکسان نباشند چقدر است؟

۱) $\frac{۱۲۰}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۶}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۳۰}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۹۰}{۲۱۶}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» کل فضای نمونه $n(S)=۶^۳=۲۱۶$ حالت دارد اما برای ما مطلوب آن است که اعداد رو شده یکسان نباشند. اولین بار که تاس پرتاب می‌شود ۶ حالت برای آن وجود دارد در دفعه دوم ۵ حالت ممکن است رخ دهد زیرا عدد دوم نباید مانند عدد اول باشد و در دفعه سوم ۴ حالت وجود دارد (عدد سوم نباید مانند عدد اول و دوم باشد) بنابراین:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}=\frac{۶\times۵\times۴}{۲۱۶}=\frac{۱۲۰}{۲۱۶}$$

مثال ۴۲: یک گروه از افراد خردسال شامل b پسربچه و g دختربچه را به تصادف در یک خط مرتب می‌کنیم. احتمال اینکه فرد قرار گرفته در موقعیت iام $(1\le i\le b+g)$ دختربچه باشد کدام است؟

۱) $\frac{g}{b+g}$ ۲) $\frac{b}{b+g}$ ۳) $\frac{g!\times\binom{b}{1}}{(b+g)!}$ ۴) $\frac{\binom{g}{1}}{(b+g)!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» کل حالات مرتب‌کردن $(b+g)$ کودک در یک خط است در صورت کسر یک نفر از دختر بچه‌ها را انتخاب کرده در موقعیت i ام قرار می‌دهیم و مابقی را در خط مرتب می‌کنیم.

$$P(A)=\frac{\binom{g}{1}(b+g-1)!}{(b+g)!}=\frac{g}{b+g}$$

مثال ۴۳: در ظرفی n توپ قرار دارد که یکی از آنها خاص است. اگر K توپ را از ظرف خارج کنیم به طوری که انتخاب هر توپ که در ظرف باقی می‌ماند شانس برابر با سایر توپ‌ها داشته باشد احتمال اینکه توپ خاص از ظرف خارج شده باشد کدام است؟

۱) $\frac{k}{n}$ ۲) $\frac{k-1}{n-1}$ ۳) $\frac{k-1}{n^k}$ ۴) $\frac{(k-1)!}{\binom{n}{k}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا توپ خاص را به ۱ حالت انتخاب می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}=\frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}=\frac{k}{n}$$

مثال ۴۴: در یک بازی، بازیکن‌ها شش عدد صحیح مختلف را از بین اعداد ۱ تا ۴۹ انتخاب می‌کنند (ترتیب انتخاب مهم نیست) سپس ۶ عدد به عنوان اعداد برنده اعلام می‌شود. بازیکنی که همه شش عدد انتخابی او همان اعداد اعلام شده باشد جایزه بسیار بزرگی را می‌برد. و به همین ترتیب برای نفر دوم جایزه نصیب او می‌شود، اگر دقیقاً ۵ عدد انتخابی او مطابق پنج عدد اعلام شده باشد و برای نفر سوم نیز به همین ترتیب، احتمال برنده شدن جایزه سوم کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵۴۱۰۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۷۷۰۰}$ ۴) $\frac{۱}{۵۰۱۰}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تعداد کل حالات برابر با انتخاب ۶ عدد از ۴۹ عدد است، اکنون حالت مطلوب آن است که ۴ عدد از ۶ عدد یکسان باشند و ۲ انتخاب دیگر مهم نیست.

$$P(A)=\frac{\binom{۶}{۴}\binom{۴۳}{۲}}{\binom{۴۹}{۶}}\simeq\frac{۱}{۱۰۳۲}$$

مثال ۴۵: شهری ۴ تعمیرکار تلویزیون دارد اگر ۴ دستگاه تلویزیون خراب باشند احتمال اینکه دقیقاً به ۲ تعمیرکار مراجعه شود کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۳۲ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۴۷

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تعداد کل حالات برابر است با تعداد حالات تقسیم ۴ تلویزیون خراب بین ۴ تعمیرکار تلویزیون ($۴^۴$ حالت) در صورت کسر احتمال، ابتدا ۲ تا از ۴ تعمیرکار انتخاب می‌گردد. حال ما ۴ تلویزیون متفاوت و ۲ تعمیرکار مختلف داریم یا به هر کدام از آنها ۲ تلویزیون خراب یا یکی را انتخاب کرده به او ۳ تلویزیون و به دیگری یکی می‌دهیم.

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}\left[\frac{۴!}{۲!۲!}+\binom{۲}{۱}\frac{۴!}{۳!۱!}\right]}{۴^۴}\simeq ۰/۳۲$$

راه حل دوم: ابتدا دو تعمیرکار از ۴ تعمیرکار را انتخاب کرده و هر کدام از ۴ تلویزیون خراب به $۲^۴$ انتخاب دارند که بین ۲ تعمیرکار تقسیم شوند از این تعداد حالات، دو حالت است که هر چهار تلویزیون به یک تعمیرکار می‌رسد و جزء حالات مساعد نیست.

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}(۲^۴-۲)}{۴^۴}\simeq ۰/۳۲$$

مثال ۴۶: *خانمی n کلید دارد که یکی از آنها درب منزلش را باز می‌کند. اگر او کلیدها را به تصادف انتخاب کرده و آنهایی که درب را باز نمی‌کنند کنار گذارد با چه احتمالی در kامین تلاش درب را باز می‌کند؟*

۱) $\frac{k}{n}$ ۲) $\frac{k-1}{n}$ ۳) $\frac{(k-1)!}{n!}$ ۴) $\frac{1}{n}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» A_i: پیشامد آن است که درب در آزمایش i ام باز شود $(i=1,2,\dots,k)$ بنابراین $P(A_1)=\frac{1}{n}$ (درب در آزمایش اول باز شود) $P(A_2)=\frac{1}{n-1}$ (درب در آزمایش دوم باز شود) و . . . .

$$P(A'_1)=1-\frac{1}{n}\ ,\ P(A'_2)=1-\frac{1}{n-1},\ \dots\ ,\ P(A_k)=\frac{1}{n-(k-1)}$$

$$P(A)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\dots\times\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$$

مثال ۴۷: *اگر ۸ مهره رخ شطرنج را به تصادف روی صفحه شطرنج قرار دهیم احتمال اینکه هیچ یک از رخ‌ها دیگری را نزند یعنی هیچ سطر و یا ستونی بیش از یک رخ نداشته باشد چقدر است؟*

۱) $\frac{64\times 50\times 36\times 25\times 16\times 9\times 5}{64\times 63\times\dots\times 57}$ ۲) $\frac{64\times 49\times 36\times 25\times 16\times 9\times 4\times 1}{64\times 63\times\dots\times 57}$

۳) $\frac{8^8}{\binom{64}{8}}$ ۴) $\frac{7!}{\binom{64}{8}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲». برای انتخاب اولین مکان ۶۴ گزینه داریم برای دومین رخ سطر یا ستون رخ اول حذف شده است یعنی ۱۵ خانه حذف شده است ۴۹ = ۱۵ − ۶۴ برای انتخاب سوم ۱۳ خانه دیگر حذف می‌شود ۳۶ = ۱۳ − ۴۹ گزینه و همینطور تا آخرین خانه.

$$P(A)=\frac{64\times 49\times 36\times 25\times 16\times 9\times 4\times 1}{64\times 63\times\dots\times 57}$$

مثال ۴۸: *روی درب منزل شما ۲ قفل وجود دارد و کلیدهای آنها در بین ۵ کلید مختلفی است که در جیب دارید اما یکی از آنها را گم کرده‌اید. احتمال اینکه هنوز هم بتوانید درب منزلتان را باز کنید کدام است؟*

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» برای اینکه بتوانید درب منزلتان را باز کنید باید کلید گم شده در بین ۳ کلید اضافی باشد یعنی:

$$P(A)=\frac{\binom{3}{1}}{\binom{5}{1}}=\frac{3}{5}$$

مثال ۴۹: *در کمدی ۱۰ جفت کفش وجود دارد اگر ۸ لنگه کفش به تصادف انتخاب شود احتمال اینکه هیچ جفت کفش انتخاب نشود کدام است؟*

۱) ۰/۰۹ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۰۴۵ ۴) ۰/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ۱۰ جفت کفش نامتمایز داریم، پس ۲۰ لنگه داریم. ۱۰ تا چپ و ۱۰ تا راست. پس تعداد کل حالات $\binom{20}{8}$ حالت است.

اکنون حالات مطلوب؛ برای آنکه هیچ جفت کفشی جور نشود باید ۸ لنگه از ۱۰ لنگه برداریم (یا راست یا چپ) پس هر لنگه ۲ حالت دارد.

$$P(A)=\frac{2^8\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}}=0/09$$

راه حل دوم: برای انتخاب لنگه کفش اول ۲۰ حالت وجود دارد در انتخاب دوم لنگه انتخاب شده اول را نمی‌توانیم انتخاب کنیم. پس ۱۸ انتخاب داریم در انتخاب سوم نباید لنگه کفش اول یا دوم را برداریم ۲ لنگه هم برداشته بودیم پس ۱۶ انتخاب داریم و ... .

$$P(A)=\frac{20\times 18\times 16\times\dots\times 6}{20\times 19\times 18\times\dots\times 13}\simeq 0/091$$

ب ـ درست یک جفت کفش انتخاب شود کدام است؟

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۰۳۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» یک جفت از ۱۰ جفت برمی‌داریم اکنون باید ۶ لنگه دیگر برداریم که جور نباشند (یک جفت معادل ۲ لنگه برداشته شده است) که مانند قسمت الف مسئله است.

$$P(A)=\frac{\binom{10}{1}\binom{9}{6}\times 2^6}{\binom{20}{8}}\simeq 0/4$$

مثال ۵۰: *۶ تاس را می‌ریزیم احتمال بدست آمدن سه جفت کدام است؟*

۱) $\frac{90}{6^6}$ ۲) $\frac{15}{6^6}$ ۳) $\frac{600}{6^6}$ ۴) $\frac{1800}{6^6}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴». ابتدا تاس‌ها را به سه دسته دوتایی تقسیم می‌کنیم (برای جفت آوردن) تعداد حالات برابر است با $\frac{6!}{2!2!2!}=\binom{6}{4}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ اکنون از جفت‌های $(6,6),\dots,(3,3),(2,2),(1,1)$ ۳ تا به $\binom{6}{3}$ حالت انتخاب می‌کنیم.

$$P(A)=\frac{\binom{6}{3}.\frac{6!}{2!2!2!}}{6^6}=\frac{1800}{6^6}$$

مثال ۵۱: *در ظرفی ۵۲ توپ از ۴ رنگ مختلف وجود دارد که هر رنگ با شماره‌های ۱ تا ۱۳ مشخص شده‌اند، از این ظرف ۵ توپ به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.*

الف ـ احتمال اینکه همه توپ‌ها از یک رنگ نبوده و اعداد روی آنها پشت سرهم باشد کدام است؟

۱) ۰/۰۲۷ ۲) ۰/۰۰۳۶ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۰۰۱۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کل حالات برابر با انتخاب ۵توپ از ۵۲ توپ می‌باشد حالتی را فرض کنید که مثلاً اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را بیرون بکشیم. برای ۱ (۴ حالت) برای ۲ (۴ حالت) برای ۳ (۴ حالت) و برای ۵ (۴ حالت) وجود دارد پس کل حالاتی که می‌توان اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را انتخاب کرد 4^5 حالت است. اما توجه کنید که ۴ حالت آن همه توپ‌ها از یک رنگ هستند بنابراین 4^5-4 حالت، حالت‌هایی هستند که ۵ توپ انتخاب شده (۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱) اعداد پشت سر هم بوده و هم رنگ نباشند، به همین ترتیب برای اعداد پشت سر همدیگر . . . تا نهایتاً برای اعداد ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ نیز تعداد حالت‌ها برابر با 4^5-4 است که تعداد حالت‌های مطلوب ما برابر با $9(4^5-4)$ است؛ بنابراین:

$$P(A)=\frac{9(4^5-4)}{\binom{52}{5}}\simeq 0/0036$$

ب ـ احتمال اینکه از ۵ توپ انتخاب شده ۳ توپ با شماره‌های یکسان و ۲ توپ دیگر نیز با شماره‌های یکسان باشند کدام است؟

۱) 14×10^{-6} ۲) $0/0027$ ۳) $0/0018$ ۴) $0/0014$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» دوباره تعداد کل حالت‌ها برابر با $\binom{52}{5}$ می‌باشد. اما حالت‌های مطلوب ما: به تعداد $\binom{4}{3}\binom{4}{2}$ حالت می‌توان ۳ توپ با شماره‌های یکسان (مثلاً شماره ۱) و ۲ توپ با شماره‌های دیگر یکسان (مثلاً ۵) انتخاب شوند اما انتخاب ۳ توپ اول به ۱۳ حالت و انتخاب ۲ توپ بعدی به ۱۲ حالت ممکن است. بنابراین:

$$P(A)=\frac{13\times 12\times\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}\simeq 0/0014$$

ج ـ فرض کنید کل توپ‌ها را بین ۴ نفر بطور مساوی تقسیم کنیم احتمال اینکه یکی از افراد ۱۳ توپ هم رنگ دریافت کند کدام است؟

۱) $6/3\times 10^{-12}$ ۲) $4/3\times 10^{-6}$ ۳) $7/1\times 10^{-10}$ ۴) $0/0027$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان ۵۲ توپ را بین ۴ نفر بطور مساوی تقسیم کرد برابر است با $\frac{52!}{13!13!13!13!}$

(طبق قضیه ۱) ابتدا ۱۳ توپ هم رنگ را به یکی از افراد می‌دهیم که به $4\times\binom{13}{13}$ حالت ممکن است و سپس بقیه توپ‌ها را بین سه نفر باقیمانده توزیع می‌کنیم.

$$P(A)=\frac{4\times\binom{13}{13}\times\frac{39!}{13!13!13!}}{\frac{52!}{13!13!13!13!}}\simeq 6/3\times 10^{-12}$$

د ـ احتمال اینکه هر یک از ۴ نفر توپ شماره ۷ را دریافت کنند کدام است؟

۱) $0/1$ ۲) $0/5$ ۳) $0/8$ ۴) $0/9$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دوباره تعداد کل حالت‌ها تقسیم ۵۲ توپ بین ۴ نفر برابر است با: $\frac{52!}{13!13!13!13!}$

در صورت کسر احتمال، ابتدا ۴ توپ شماره ۷ را بین ۴ نفر به !۴ طریق تقسیم می‌کنیم، سپس به هر کدام از آنها ۱۲ توپ دیگر می‌دهیم بنابراین:

$$P(A)=\frac{4!\times\frac{48!}{12!12!12!12!}}{\frac{52!}{13!13!13!13!}}\simeq 0/1$$

✍ مثال ۵۲: n مهره را یکی یکی بطور تصادفی درون N ظرف $u_N,\dots,u_2,u_1$ قرار می‌دهیم. احتمال اینکه در ظرف u_1، k مهره قراربگیرد، چیست؟ (گنجایش ظرفها محدودیتی ندارد.)

۱) $\frac{(N-1)^{n-k}}{N^n}$ ۲) $\frac{\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}}{N^n}$ ۳) $\frac{\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}}$ ۴) $\frac{\binom{n}{k}\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» می‌دانیم، تعداد طرق تقسیم n شیء نامتمایز بین r نفر برابر است با:

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

در این مسأله، ابتدا k مهره را درون ظرف u_1 می‌ریزیم برای این کار $\binom{n}{k}$ راه وجود دارد. حال مسأله این است که می‌خواهیم $n-k$ مهره را درون $N-1$ ظرف قرار دهیم تعداد راهها، برابر است با:

$$\binom{n-k+(N-1)-1}{(N-1)-1}=\binom{N+n-k-2}{N-2}=\binom{N+n-k-2}{n-k}$$

لذا تعداد حالات مساعد برابر است با:

$$\binom{n}{k}\binom{N+n-k-2}{n-k}$$

از طرفی، تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{n+N-1}{N-1}=\binom{n+N-1}{n}$$

$$\text{احتمال}=\frac{\text{حالات مساعد}}{\text{کل حالات}}=\frac{\binom{n}{k}\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}}$$

چند قضیه احتمال:

قضیه ۱: $P(\phi)=0$

قضیه ۲: اگر A یک پیشامد و 'A متمم آن باشد. $P(A)=1-P(A')$ یا $P(A')=1-P(A)$

مثال ۵۳: ***اگر سکه‌ای را ۵ بار پرتاب کنیم احتمال آوردن حداقل یک شیر را بدست آورید.***

۱) $\frac{31}{32}$ ۲) $\frac{1}{32}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» اگر A پیشامد مشاهده حداقل یک شیر باشد آنگاه A' پیشامد متمم آن، پیشامد مشاهده هیچ شیر است. یعنی $A'=\{(TTTTT)\}$ و $n(A')=1$ پس داریم: $n(S)=2^5=32$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

مثال ۵۴: ***دو تاس را n بار پرتاب می‌کنیم، کمترین n ممکن برای اینکه احتمال حداقل یک مرتبه جفت ۶، دست کم برابر با $\frac{1}{2}$ شود کدام است؟***

۱) $n=40$ ۲) $n=25$ ۳) $n=30$ ۴) $n=15$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$P(\text{حداقل یک جفت ۶})=1-P(\text{هیچ جفت ۶})\geq\frac{1}{2}$$

$$=1-\left(\frac{35}{36}\right)^n\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\frac{35}{36}\right)^n\leq\frac{1}{2}\Rightarrow n=25$$

مثال ۵۵: ***یک خانواده باید چند فرزند داشته باشد تا به احتمال ۹۵ درصد حداقل یک پسر و حداقل یک دختر داشته باشد؟***

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» احتمال آنکه تمام فرزندان پسر باشد $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و احتمال اینکه همه دختر باشند نیز $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ می‌باشد.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$1-P(A\cup B)=1-\frac{1}{2^{n-1}}\geq\frac{95}{100}\Rightarrow\frac{1}{2^{n-1}}\geq\frac{5}{100}\Rightarrow n=6$$

قضیه۳: اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند آنگاه

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

مثال ۵۶: ***فرض کنید دو سکه را با هم پرتاب کنیم احتمال اینکه اولین یا دومین سکه شیر بیاید کدام است؟***

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{5}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

تعمیم قضیه (۳):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i_1<i_2}P(A_{i_1}\cap A_{i_2})+\dots$$
$$+(-1)^{k+1}\sum_{i_1<i_2<\dots<i_k}P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\dots\cap A_{i_k})+\dots+(-1)^{n+1}.P(A_1\cap A_2\cap\dots A_n)$$

در اینجا جمع $\sum_{i_1<i_2<\dots<i_k}$ روی تمام زیرمجموعه‌های با تعداد k عنصر از مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$ انجام می‌شود. مثلاً برای $n=3$ داریم که:

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

به زبان ساده‌تر، در حالت کلی احتمال اجتماع n پیشامد، برابر است با مجموع احتمالات پیشامدها منهای مجموع احتمالات اشتراک‌های دوتایی آنها، بعلاوه مجموع احتمالات اشتراک‌های سه تایی آنها و ... .

مثال ۵۷: ***اگر ۴ زوج به تصادف در یک ردیف صندلی بنشینند، احتمال اینکه هیچ شوهری پهلوی همسرش نباشد کدام است؟***

۱) $\frac{23}{35}$ ۲) $\frac{12}{35}$ ۳) $\frac{17}{35}$ ۴) $\frac{21}{35}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» $P(\text{هیچ زوجی کنار هم نباشند})=1-P(\text{حداقل یک زوج کنار هم باشند})=1-P\left(\bigcup_{i=1}^{4}A_i\right)$

$$=1-\left[\frac{\binom{4}{1}2!7!}{8!}-\frac{\binom{4}{2}(2!)^2 6!}{8!}+\frac{\binom{4}{3}(2!)^3 5!}{8!}-\frac{\binom{4}{4}(2!)^4 4!}{8!}\right]=1-\frac{23}{35}=\frac{12}{35}$$

مثال ۵۸: ***اگر ۱۰ زوج متأهل دور یک میزگرد غذاخوری نشسته باشند احتمال اینکه هیچ زنی در کنار شوهرش نباشد کدام است؟***

۱) ۰/۶۷ ۲) ۰/۳۸ ۳) ۰/۶۲ ۴) ۰/۳۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر $A_i\ (i=1,2,\dots,10)$ نشان دهنده پیشامدی باشد که i امین زوج کنار هم نشسته باشند آنگاه احتمال مورد نظر برابر با $1-P\left(\bigcup_{i=1}^{10}A_i\right)$ است.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{10}A_i\right)=\sum_{i=1}^{10}P(A_i)-\dots+(-1)^{n+1}.\sum_{i_1<i_2<\dots<i_n}P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_n})+\dots-P(A_1A_2\dots A_{10})$$

$$=\binom{10}{1}2^1\frac{18!}{19!}-\binom{10}{2}2^2\frac{17!}{19!}+\binom{10}{3}2^3\frac{16!}{19!}-\dots-\binom{10}{10}2^{10}\frac{9!}{19!}\simeq 0/66\quad\Rightarrow 1-P\left(\bigcup_{i=1}^{10}A_i\right)=1-0/66\simeq 0/33$$

قضیه (مسأله انطباق): فرض کنید هر یک از N مردی که در یک مهمانی شرکت دارند کلاه خود را در وسط اتاق پرتاب کنند آنگاه، ابتدا کلاه‌ها را مخلوط نموده و سپس هر مرد به تصادف کلاهی را انتخاب کند.

احتمال اینکه هیچ مردی کلاه خود را انتخاب نکند برابر است با:

$$1-P\left(\bigcup_{i=1}^{N}A_i\right)=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+\frac{(-1)^N}{N!}$$

و

احتمال اینکه دقیقاً K مرد کلاه خود را انتخاب کنند برابر است با:

$$\frac{\binom{N}{K}.(N-K)!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+\frac{(-1)^{N-K}}{(N-K)!}\right]}{N!}$$

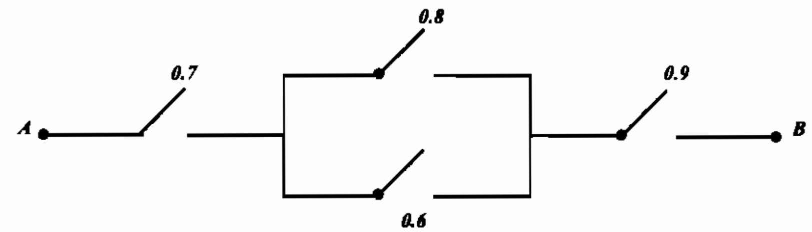
مثال ۵۹: میان دو نقطه A و B ارتباط از طریق شبکه‌ای است که احتمال وصل بودن قطعات آن در شکل زیر نشان داده شده است. احتمال برقراری ارتباط میان نقاط A و B برابر است با:

۱) ۰/۵۷۹۶

۲) ۰/۵۰۴

۳) ۰/۳۷۸

۴) ۰/۸۸۲



پاسخ: گزینه «۱» **روش اول:**

$$P(A\cup B)=۰/۸+۰/۶-(۰/۸\times ۰/۶)=۰/۹۲ \Rightarrow p=۰/۷\times ۰/۹۲\times ۰/۹=۰/۵۷۹۶$$

روش دوم:

$$p=۰/۷(۰/۸\times ۰/۴+۰/۶\times ۰/۲+۰/۸\times ۰/۶)\times ۰/۹=۰/۵۷۹۶$$

توجه کنید که ۰/۴ احتمال آن است که کلید پائین باز باشد و ۰/۲ احتمال آن است که کلید بالا باز باشد.

مدل احتمال روی فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر:

در ابتدای این بخش در مورد مدل احتمال بر روی فضای نمونه متناهی بحث کردیم. در اینجا در مورد فضای نمونه به صورت $S=\{e_1,e_2,e_3,...\}$ بحث خواهیم کرد.

مثال ۶۰: تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار عدد ۶ مشاهده شود.

الف ـ احتمال اینکه تعداد پرتاب‌های لازم مضرب ۳ باشد را بدست آورید.

ب ـ احتمال اینکه حداقل ۳ پرتاب لازم باشد را بدست آورید.

پاسخ: الف ـ فضای نمونه به این صورت است که ممکن است ما بار اول عدد ۶ مشاهده کنیم، ممکن است بار دوم و ...

$S=\{e_1,e_2,...\}$

احتمال اینکه ما بار اول عدد ۶ را مشاهده کنیم $\frac{۱}{۶}$ است.

احتمال اینکه ما بار دوم عدد ۶ را مشاهده کنیم یعنی ما بار اول عدد ۶ مشاهده نکردیم $P=\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۶}$ و . . . .

S	e_1	e_2	e_3 ...
احتمال	$\frac{۱}{۶}$	$(\frac{۵}{۶}).\frac{۱}{۶}$	$(\frac{۵}{۶})^{۲}.\frac{۱}{۶}$ ...

اگر A_1 پیشامد این باشد که تعداد پرتاب‌های لازم مضرب ۳ باشد در اینصورت:

$$A_1=\{e_3,e_6,e_9,...\}\Rightarrow P(A_1)=(\frac{۵}{۶})^{۲}.\frac{۱}{۶}+(\frac{۵}{۶})^{۵}.\frac{۱}{۶}+...=\frac{(\frac{۵}{۶})^{۲}.\frac{۱}{۶}}{۱-(\frac{۵}{۶})^{۳}}=\frac{۲۵}{۹۱}$$

ب ـ اگر A_2 پیشامد آن باشد که حداقل ۳ پرتاب لازم باشد در اینصورت:

$$A_2=\{e_3,e_4,e_5,...\}\Rightarrow P(A_2)=(\frac{۵}{۶})^{۲}.\frac{۱}{۶}+(\frac{۵}{۶})^{۳}.\frac{۱}{۶}+...=\frac{(\frac{۵}{۶})^{۲}.\frac{۱}{۶}}{۱-\frac{۵}{۶}}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

مثال ۶۱: سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا یک شیر مشاهده شود.

الف ـ احتمال اینکه تعداد پرتابهای لازم فرد باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه «۲»

فضای نمونه به این صورت است که ممکن است بار اول شیر مشاهده شود ممکن است بار اول خط مشاهده شود و بار دوم شیر مشاهده شود و . . . .

S	H	TH	TTH...
احتمال	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$...

$$P(A)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳۲}+...=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-(\frac{۱}{۲})^{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

ب ـ احتمال اینکه حداقل ۵ پرتاب لازم باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$P(B)=(\frac{۱}{۲})^{۵}+(\frac{۱}{۲})^{۶}+...=\frac{(\frac{۱}{۲})^{۵}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۶}$$

مدل احتمال بر روی فضای نمونه پیوسته:

در بعضی مواقع فضاهای نمونه می‌توانند به صورت یک سطح محدود شده یا فضاهای دو بعدی و سه بعدی یا فواصل عددی از اعداد حقیقی باشند.

$$P(A)=\frac{\text{طول زیرفاصله } A}{\text{طول کل فضای نمونه}}=\frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت کل فضای نمونه}}$$

مثال ۶۲: عددی را به تصادف از فاصله اعداد حقیقی $[۳,۷]$ انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه عدد انتخابی در فاصله $[۴,۵/۵]$ باشد را بدست آورید.

پاسخ: کل فضای نمونه ما به صورت $S=[۳,۷]$ و پیشامد $A=[۴,۵/۵]$ می‌باشد.

$$P(A)=\frac{\text{طول زیرفاصله } A}{\text{طول کل فضای نمونه}}=\frac{۵/۵-۴}{۷-۳}=\frac{۱/۵}{۴}=۰/۳۷$$

مثال ۶۳: احتمال اینکه سینوس یک عدد تصادفی از بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ بزرگتر از کسینوس آن باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

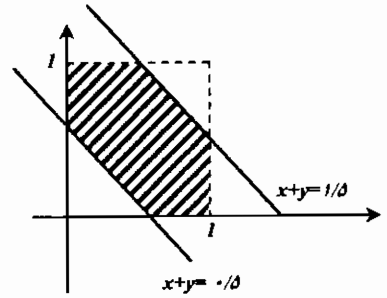
پاسخ: گزینه «۱» در فاصله $(\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ سینوس از کسینوس بزرگتر است. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲}-۰}=\frac{\frac{\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۶۴: دو عدد تصادفی را در فاصله (۱و۰) انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه مجموع آنها بین ۰/۵ و ۱/۵ باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۳». اگر یکی از اعداد را با x و دیگری را با y نشان دهیم آنگاه نقطه به مختصات (x,y) در داخل مربع به ضلع ۱ واقع است و ناحیه مطلوب نقاطی است که:



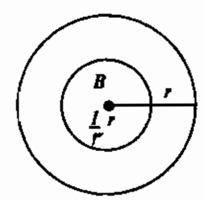
$$0/5 \le x+y \le 1/5$$

$$P(A)=\frac{1-2\left(\frac{0/5\times 0/5}{1}\right)}{1}=1-0/25=0/75$$

مثال ۶۵: نقطه‌ای را به طور تصادفی از دایره‌ای به شعاع r = ۳ انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه نقطه انتخابی تا محیط دایره حداکثر $\frac{2}{3}$ شعاع باشد برابر است با:

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{8}{9}$ ۳) $\frac{9}{10}$ ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۲».



$$S_{\text{کل}}=\pi r^2=9\pi$$

$$S_A=S_{\text{کل}}-S_B=\pi r^2-\frac{\pi r^2}{9}=\frac{8}{9}\pi r^2$$

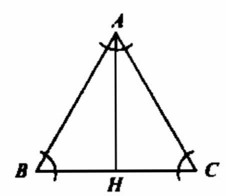
$$P(A)=\frac{S_A}{S_{\text{کل}}}=\frac{\frac{8}{9}\pi r^2}{\pi r^2}=\frac{8}{9}$$

مثال ۶۶: یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌شود، احتمال آنکه فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از یک باشد کدام است؟

۱) $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ ۲) $1-\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه «۲».

ابتدا به مرکز هر رأس به شعاع ۱ کمانی رسم می‌کنیم اگر نقطه انتخابی از هر رأس بیشتر از یک واحد فاصله داشته باشد باید درون مثلث خارج از این سه دایره باشد.



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(AH\times BC)$$

$$AH^2=AB^2-BH^2 \Rightarrow AH^2=3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow AH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 3=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

اکنون مساحت ۳ قطاع را به دست می‌آوریم:

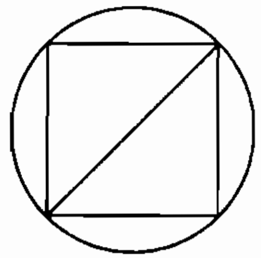
$$S_1=\frac{\alpha}{360}\times\pi r^2=\frac{60}{360}\times\pi\times 1\times 1=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow S_1+S_2+S_3=\frac{\pi}{2} \Rightarrow P(\text{مطلوب})=\frac{\text{مساحت کل مثلث}-\text{مجموع مساحت قطاعها}}{\text{مساحت کل مثلث}}=\frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}}=1-\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

مثال ۶۷: مربعی به طول ضلع a در داخل دایره‌ای محاط شده است. اگر نقطه‌ای به تصادف در دایره انتخاب شود با چه احتمالی نقطه در داخل مربع است؟

۱) $\frac{1}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) $\frac{a^2}{2\pi}$ ۴) $\frac{2a^2}{\pi}$

پاسخ: گزینه «۲».



$$\text{شعاع دایره}=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi\frac{a^2}{2}$$

$$\text{مساحت مربع}=a^2\,,\ P=\frac{a^2}{\frac{\pi}{2}a^2}=\frac{2}{\pi}$$

احتمال شرطی

در پاره‌ای از مسائل نیاز به محاسبه یک پیشامد مانند A مشروط بر رخ داد پیشامددیگری مانند B داریم:

تعریف: احتمال شرطی پیشامدA به شرط وقوع پیشامدB که آن را با نماد $P(A\,|\,B)$ نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ ,\quad P(B)\neq 0$$

مثال ۶۸: جعبه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۲ مهره آبی است. از جعبه مهره‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم این مهره سفید نیست احتمال اینکه سیاه باشد را بدست آورید.

پاسخ: اگر B پیشامد سیاه بودن مهره و W' پیشامد سفید نبودن مهره باشد.

$$P(B\,|\,W')=\frac{P(B\cap W')}{P(W')}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{6}{9}}=\frac{2}{3}$$

مثال ۶۹: دو تاس را می‌اندازیم متوجه می‌شویم مجموع روی دو تاس عدد ۷ آمده است احتمال اینکه یکی از آنها ۲ آمده باشد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه «۳». اگر B پیشامد آمدن مجموع ۷ باشد و A پیشامد آمدن عدد ۲ باشد داریم که:

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$B=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$$

مثال ۷۰: دو تاس را می‌ریزیم متوجه می‌شویم دو عددی که آمده‌اند یکسان نیستند احتمال آنکه مجموع ۷ بیاید کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲». اگر B پیشامد آن باشد که دو عددی که آمده یکسان نباشند و A پیشامد مجموع ۷ باشد داریم که:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۶}{۳۶}}{۱-\frac{۶}{۳۶}}=\frac{\frac{۶}{۳۶}}{\frac{۳۰}{۳۶}}=\frac{۶}{۳۰}=\frac{۱}{۵}$$

مثال ۷۱: از بین همه خانواده‌های سه فرزندی، خانواده‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم که این خانواده لااقل یک پسر دارد، احتمال اینکه این خانواده تنها دارای یک دختر باشد برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» $S=\{GGG, GGB, GBG, BGG, BBG, BGB, GBB, BBB\}$

اگر بدانیم این خانواده لااقل یک پسر دارد یعنی حالت (GGG) را نداریم و فضای نمونه کوچک شده و ۷ حالت دارد اکنون احتمال اینکه این خانواده تنها دارای یک دختر باشد یعنی حالتهای مطلوب $A=\{BBG, BGB, GBB\}$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۷}$$

مثال ۷۲: در یک شهر بزرگ ۰/۵ درصد به ویروس خاصی آلوده هستند، آزمایش تشخیص این ویروس توانایی تشخیص ۸۰ درصد موارد را برای افراد سالم و ۹۸ درصد موارد را برای افراد بیمار دارد فردی آزمایش شده و بیمار تشخیص داده شده است، احتمال آن که تشخیص غلط باشد چیست؟

۱) ۰/۰۰۵ ۲) ۰/۱۹۹ ۳) ۰/۹۷۶ ۴) ۰/۷۹۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۴». پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A: فرد بیمار تشخیص داده شود.

B: فرد سالم باشد.

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap B')\Rightarrow P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$$

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B)=۰/۲\times ۰/۹۵+۰/۹۸\times ۰/۰۵=۰/۲۳۹$$

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{۰/۲\times ۰/۹۵}{۰/۲۳۹}=\frac{۰/۱۹۰}{۰/۲۳۹}=۰/۷۹۵$$

قانون ضرب احتمال:

اگر A و B دو پیشامد باشند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند آنگاه: $P(A\cap B)=P(A).P(B|A)$

تعمیم قانون ضرب احتمال:

اگر $A_۱, A_۲, ..., A_k$ پیشامدهایی باشند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند آنگاه:

$$P(A_۱\cap A_۲\cap ...\cap A_k)=P(A_۱).P(A_۲|A_۱).P(A_۳|A_۱\cap A_۲)...P(A_k|A_۱\cap A_۲\cap ...\cap A_{k-۱})$$

مثال ۷۳: جعبه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. ۳ مهره یک به یک و بدون جایگذاری از جعبه خارج کنیم.

الف ـ احتمال اینکه مهره انتخابی اول قرمز، دومی سفید و سومی قرمز باشد را بدست آورید.

ب ـ احتمال اینکه دو مهره قرمز و یک مهره سفید انتخاب شوند را بدست آورید.

☑ **پاسخ:** الف ـ طبق تعمیم قانون ضرب احتمال

$$P(R_۱\cap W_۲\cap R_۳)=P(R_۱).P(W_۲|R_۱).P(R_۳|R_۱\cap W_۲)=\frac{۲}{۹}\times\frac{۳}{۸}\times\frac{۱}{۷}=\frac{۱}{۸۴}$$

ب ـ در اینجا ترتیب انتخاب مهره‌ها مهم نیست.

$$P(A)=\frac{\binom{۲}{۲}\binom{۳}{۱}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۱}{۲۸}$$

پیشامدهای مستقل:

تعریف: دو پیشامد A و B را از یکدیگر مستقل گویند اگر و فقط اگر:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

تعریف: سه پیشامد A و B و C را مستقل گوئیم اگر و فقط اگر همه روابط زیر با هم برقرار باشند:

۱) $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

۲) $P(A\cap C)=P(A).P(C)$

۳) $P(B\cap C)=P(B).P(C)$

۴) $P(A\cap B\cap C)=P(A).P(B).P(C)$

مثال ۷۴: سه تیرانداز به سمت هدفی با احتمال برخورد $\frac{۳}{۴}$ تیراندازی می‌کنند. پرتاب‌ها مستقل از یکدیگر می‌باشند. احتمال دو اصابت را بدست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$P(\text{دو اصابت})=P(A_۱\cap A_۲\cap A'_۳)+P(A_۱\cap A'_۲\cap A_۳)+P(A'_۱\cap A_۲\cap A_۳)$$

$$=\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}=(\frac{۳}{۴})^۳$$

مثال ۷۵: یک جفت تاس را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم احتمال آنکه مجموع اعداد روی دو تاس ۵ و ۱۰ شود کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{۱}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۵۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰۰}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳».

A_i: پیشامد اینکه در پرتاب i ام مجموع ۵ شود

B_i: پیشامد اینکه در پرتاب iام مجموع ۱۰ شود

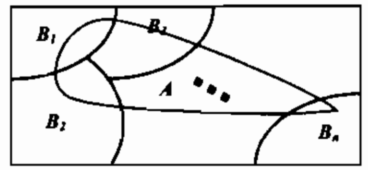
$$P((A_۱\cap B_۲)\cup(B_۱\cap A_۲))=P(A_۱\cap B_۲)+P(B_۱\cap A_۲)$$ (به دلیل ناسازگاری)

$$=P(A_۱).P(B_۲)+P(B_۱).P(A_۲)$$ (به دلیل استقلال)

$$=\frac{۴}{۳۶}\times\frac{۳}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}\times\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۵۴}$$

قانون احتمال کل و قضیه بیز:

فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی باشند که دو بدو ناسازگار بوده و اجتماع آنها برابر فضای نمونه S باشد.
و همچنین A یک پیشامد روی کلیه پیشامدهای B باشد که $i = 1,2,\dots,n$



$$B_i \cap B_j = \phi \qquad i \neq j$$

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

قانون احتمال کل:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A \mid B_i)$$

فرمول بیز:

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j).P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A \mid B_i)} \qquad j = 1,2,\dots,n$$

مثال ۷۶: سه شخص A و B و C به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال زدن به هدف این سه شخص به ترتیب $\frac{1}{6}$، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ است. اگر بدانیم که فقط یک تیر به هدف خورده است احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد برابر است با:

۱) $\frac{31}{72}$ ۲) $\frac{6}{31}$ ۳) $\frac{10}{31}$ ۴) $\frac{15}{31}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲». فرض کنید M پیشامد آن باشد که فقط یک تیر به هدف خورده است.

$$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M \mid A)P(A)}{P(M \mid A)P(A) + P(M \mid B)P(B) + P(M \mid C)P(C)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{6}{31}$$

مثال ۷۷: سه ظرف I و II و III مفروض است. ظرف I شامل یک مهره سفید و ۲ مهره سیاه است. ظرف II شامل دو مهره سفید و سه مهره سیاه است و ظرف III شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. تاس همگنی را پرتاب می‌کنیم اگر عدد ۶ بیاید ظرف III و اگر عدد ۱ یا ۲ بیاید ظرف II و در غیر اینصورت ظرف I را انتخاب کرده و مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم احتمال آنکه مهره سفید خارج شود کدام است؟

۱) $\frac{1}{630}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{240}$ ۴) $\frac{23}{74}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱». طبق قانون احتمال کل

ظرف i ام انتخاب شود: B_i

پیشامد آنکه مهره سفید خارج شود: A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A \mid B_i) = \frac{3}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{630}$$

مثال ۷۸: فرض کنید که شما به طور پیوسته تمبر جمع می‌کنید و کلاً m نوع تمبر وجود داشته باشد. همچنین فرض کنید هر مرتبه که یک تمبر جدید خریداری می‌کنید با احتمال P_i از نوع i ام ($i = 1,2,\dots,m$) است. حال اگر شما n امین تمبر را جمع‌آوری کرده باشید با چه احتمالی این تمبر جدید است؟

۱) $1 - \sum_{i=1}^{m} P_i(1-P_i)^{n-1}$ ۲) $\sum_{i=1}^{m} P_i(1-P_i)^{n-1}$

۳) $\sum_{i=1}^{m} \binom{n}{i}.P_i^n(1-P_i)^{n-m}$ ۴) صورت مسأله ناقص است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$P(\text{n امین تمبر جدید باشد}) = P(\text{نوع اول}).P(\text{جدید | نوع اول}) + P(\text{نوع دوم}).P(\text{جدید | نوع دوم}) + \dots + P(\text{نوع m}).P(\text{جدید | نوع m}) = P_1(1-P_1)^{n-1} + P_2(1-P_2)^{n-1} + \dots + P_m(1-P_m)^{n-1} = \sum_{i=1}^{m} P_i(1-P_i)^{n-1}$$

نکته: $P(\text{جدید | نوع اول})$ یعنی اینکه تمام $(n-1)$ تمبر قبلی، از نوع اول نبوده باشند یعنی $(1-P_1)^{n-1}$

مثال ۷۹: فرض کنید که سه صندوق وجود دارد که هر کدام دارای دو کشو است. در هر یک از کشوهای صندوق اول یک سکه طلا وجود دارد و در یکی از کشوهای صندوق دوم یک سکه طلا و در کشو دیگر آن یک سکه نقره وجود دارد و در هر یک از کشوهای صندوق سوم یک سکه نقره وجود دارد. یکی از صندوق‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یکی از کشوهای آن را باز می‌کنیم اگر سکه داخل این کشو طلا باشد احتمال اینکه کشوی دیگر این صندوق نیز شامل سکه طلا باشد را بدست آورید.

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴». طبق قضیه بیز:

پیشامد اینکه صندوق i ام انتخاب شود: B_i

پیشامد اینکه سکه طلا مشاهده گردد: A

$i = 1,2,3$

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1).P(A \mid B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i).P(A \mid B_i)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{2}{3}$$

مثال ۸۰: در یک کلاس ترک سیگار، ۴۸ درصد از زن‌ها و ۳۷ درصد از مردها شرکت کرده‌اند و موفق شده‌اند که حداقل یکسال بعد از کلاس سیگار نکشند. این افراد در پایان یکسال در یک جشن شرکت می‌کنند. اگر ۶۲ درصد از شرکت کنندگان در آن کلاس مرد باشند.

الف ـ درصد زن‌هایی که در جشن شرکت کرده‌اند برابر است با:

۱) ٪۳۸ ۲) ٪۴۱/۳ ۳) ٪۴۴/۳ ۴) ٪۳۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$P(\text{زن باشد | در جشن شرکت کند}) = P(A \mid B) = \frac{P(A).P(B \mid A)}{P(B \mid A).P(A) + P(B \mid A').P(A')}$$

$$= \frac{0/48 \times 0/38}{(0/48 \times 0/38) + (0/37 \times 0/62)} = 0/443 \Rightarrow 0/443 \times 100 = 44/3\%$$

ب ـ چند درصد از افراد شرکت‌کننده در کلاس در جشن شرکت کرده‌اند؟

۱) ۳۵٪ ۲) ۳۹/۷٪ ۳) ۴۱/۱۸٪ ۴) ۴۵٪

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

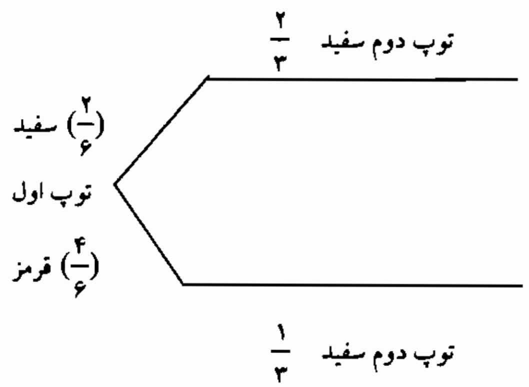
$$P(B)=P(B|A).P(A)+P(B|A').P(A')$$
$$=(0/48\times 0/38)+(0/37\times 0/62)=0/4118 \Rightarrow 0/4118\times 100=41/18\%$$

مثال ۸۱: *ظرف I شامل ۲ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است و ظرف II شامل ۱ توپ سفید و یک توپ قرمز است. یک توپ به تصادف از ظرف اول انتخاب و در ظرف دوم قرار می‌دهیم و سپس یک توپ از ظرف II انتخاب می‌کنیم.*

الف ـ احتمال اینکه توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{3}{9}$ ۴) $\frac{4}{9}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اینکه توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد بستگی به توپ اول که از ظرف I آمده است دارد. بنابراین دو حالت رخ می‌دهد اینکه توپ منتقل شده به ظرف II سفید باشد و توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد یا اینکه توپ منتقل شده به ظرف II سیاه باشد و توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد.



$\Rightarrow$ P (توپ دوم سفید) $=\frac{2}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

ب ـ احتمال اینکه توپ منتقل شده سفید باشد بشرط اینکه توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$P(W_1|W_2)=\frac{P(W_2\cap W_1)}{P(W_2)}=\frac{P(W_1).P(W_2|W_1)}{P(W_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2}$$

مثال ۸۲: *ظرفی شامل b توپ سیاه و r توپ قرمز است. یکی از توپ‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم اما وقتی آن را به ظرف بر می‌گردانیم C توپ دیگر از همان رنگ را نیز در ظرف می‌گذاریم. حال فرض کنید توپ دیگری را انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه توپ انتخاب شده اول سیاه باشد بشرط اینکه توپ دوم قرمز باشد کدام است؟*

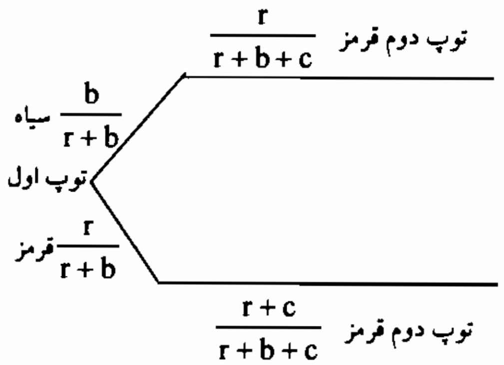
۱) $\frac{r}{r+b+c}$ ۲) $\frac{b}{r+b}$ ۳) $\frac{b}{b+r+c}$ ۴) $\frac{r}{r+b}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$P(B_1|R_2)=\frac{P(B_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{P(B_1).P(R_2|B_1)}{P(B_1).P(R_2|B_1)+P(B'_1).P(R_2|B'_1)}=$$

$$\frac{\frac{r}{r+b+c}\times\frac{b}{r+b}}{\frac{r}{r+b+c}\times\frac{b}{r+b}+\frac{r+c}{r+b+c}\times\frac{r}{r+b}}=\frac{rb}{rb+r(r+c)}=\frac{b}{b+r+c}$$

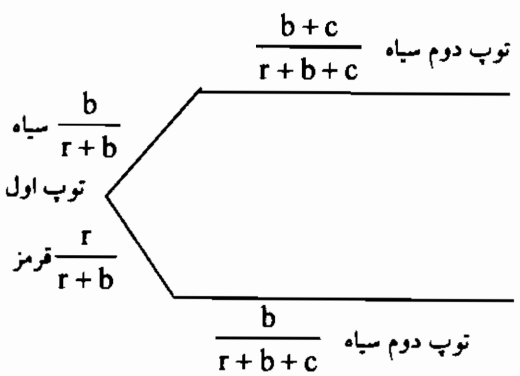
نمودار درختی مسئله به صورت روبرو می‌باشد:



مثال ۸۳: *(مدل آوندپولیا) در ظرفی b توپ سیاه و r توپ قرمز وجود دارد توپی را به تصادف انتخاب و c توپ دیگر از همان رنگ به ظرف اضافه می‌کنیم اکنون اگر توپ دیگری را از ظرف انتخاب کنیم احتمال اینکه توپ دوم سیاه باشد کدام است؟*

۱) $\frac{r}{r+b+c}$ ۲) $\frac{b}{r+b}$ ۳) $\frac{b}{r+b+c}$ ۴) $\frac{rb}{r+b+c}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»، توجه کنید که چون هیچ اطلاعی راجع‌به رنگ مهره اول به ما داده نشده است لذا مانند این است که برای اولین بار یک مهره از ظرف انتخاب می‌کنیم یعنی احتمال آن برابر با $\frac{b}{r+b}$ است این موضوع را می‌توان در زیر نشان داد.



P (توپ دوم سیاه باشد) $=\frac{b}{r+b}\times\frac{b+c}{r+b+c}+\frac{r}{r+b}\times\frac{b}{r+b+c}=\frac{b(r+b+c)}{(r+b)(r+b+c)}=\frac{b}{r+b}$

مثال ۸۴: *جعبه‌ای حاوی ۱۰ مهره سفید و ۱۲ مهره قرمز است. دو مهره به تصادف انتخاب کرده و بدون جایگذاری و بدون توجه به رنگشان آنها را دور می‌ریزیم، احتمال اینکه سومین مهره که به تصادف استخراج می‌کنیم قرمز باشد کدام است؟*

۱) $\frac{12}{20}$ ۲) $\frac{12}{22}$ ۳) $\frac{10}{20}$ ۴) $\frac{12}{18}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» در اینجا نیز چون هیچ اطلاعاتی از رنگ مهره اول و دوم نداریم انتخاب مهره سوم مانند انتخاب مهره اول است پس احتمال آن (مهره سوم) با احتمال انتخاب یک مهره قرمز برابر است با:

$$P(R_3)=\frac{12}{22}$$

می‌توان آن را با استفاده از نمودار درختی مانند مدل آوندپولیا نشان داد.

مثال۸۵: مردی در جیب خود یک سکه سالم و یک سکه که دو طرفش شیر است نگه می‌دارد. او یکی از سکه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و آن را پرتاب می‌کند اگر شیر ظاهر شود احتمال آنکه سکه سالم انتخاب شده باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{3}{5}$

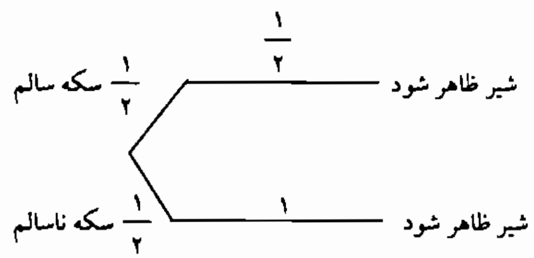
☑ **پاسخ** : گزینه «۱»

سالم بودن سکه: S

بار اول سکه شیر بیاید: N_1

$$P(S|N_1)=\frac{P(S).P(N_1|S)}{P(S).P(N_1|S)+P(N_1|S').P(S')}\Rightarrow P(S|N_1)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

نمودار درختی مسئله به صورت روبرو می‌باشد:



حیله‌های آماری

فرض کنید یک روز شنبه صبح از طریق پست نامه‌ای دریافت می‌کنید که درآن شرکتی که با آن آشنایی ندارید، بیان می‌کند که این شرکت پیش‌بینی‌های مربوط به بازار سهام را با قیمت بالایی می‌فروشد. برای آنکه توانایی شرکت را در پیش‌بینی نشان دهد، پیش‌بینی می‌کند سهام خاصی و یا پورتفولیوی خاصی در یکی دو هفته آینده افزایش خواهد یافت. شما به این نامه پاسخ نخواهید داد، ولی بازار سهام را زیرنظر خواهید داشت و توجه می‌کنید که پیش‌بینی شرکت درست است. در روز شنبه بعدی نامهٔ دیگری از همان شرکت با پیش‌بینی دیگری دریافت می‌کنید، در این پیش‌بینی بیان می‌شود که سهام بخصوصی در هفته آینده نزول خواهد کرد. مجدداً این پیش‌بینی‌ها درست از آب در می‌آید.

این کار برای هفت هفته تکرار می‌شود. هر روز شنبه نامه‌ای از شرکت دریافت می‌کنید که طی آن هر یک از این هفت پیش‌بینی درست خواهند بود. در روز شنبه هفته هشتم نامهٔ دیگری دریافت می‌کنید. این نامه بیان می‌کند به ازاء مبلغ بالایی شرکت پیش‌بینی دیگری فراهم خواهد کرد که برای آن شما می‌توانید احتمالاً پول خوبی از بازار سهام به دست آورید. چگونه باید به این نامه پاسخ دهید؟

چون شرکت هفت پیش‌بینی صحیح انجام داده است، به نظر می‌رسد که باید اطلاعات خاصی دربارهٔ بازار سهام داشته باشد. و صرفاً حدس نمی‌زند. به هر حال احتمال درست بودن حدسها دربارهٔ برآمدهای هفت پرتاب یک سکه همگن فقط برابر $(\frac{1}{2})^7=0/008$ است. بنابراین اگر این شرکت فقط به حدس متوسل می‌شد با احتمال کمتر از ۰/۰۱ می‌توانست هر هفت نتیجه را به درستی پیش‌بینی کند.

سفسطه‌ای که در اینجا رخ داده است آن است که شما ممکن است فقط نتیجه تعداد کمی از پیش‌بینی‌هایی که این شرکت در طول هفت هفته انجام داده است، دیده باشید فرض کنید برای مثال این شرکت برنامهٔ خود را برای $128=2^7$ مشتری شروع کرده باشد. در اولین شنبه این شرکت برای نیمی از مشتریها افزایش سهام را پیش‌بینی می‌کند و برای نیمی دیگر کاهش سهام را، در شنبه دوم این شرکت ممکن است با ۶۴ مشتری که پیش‌بینی او برای آنها درست بوده است مکاتبه کند. مجدداً برای نیمی از مشتریها نوعی پیش‌بینی را ارسال می‌کند و برای نیم دیگر خلاف این پیش‌بینی را. در پایان هفته هفتم شرکت (که فقط شامل یک نفر با یک دستگاه تایپ است) لزوماً یک مشتری خواهد داشت که برای او تمام پیش‌بینی‌ها درست از آب درآمده است.

با ادامه این روش با گروههای متفاوتی از ۱۲۸ مشتری و هر هفته با گروه تازه‌ای شروع به کار می‌کند، این شرکت قادر خواهد بود پاسخ‌های مثبت زیادی از مشتریهایی که برای او سود خوبی خواهند داشت، دریافت کند.

تستهای طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ـ شخصی $(m+n)$ آزمایش مستقل از یک تجربه انجام می‌دهد که احتمال موفقیت در هر آزمایش p است و $q=1-p$. در این صورت به ازای هر $k=0,1,2,\dots,n$ احتمال شرطی اینکه دقیقاً $(m+k)$ آزمایش موفق باشد با فرض اینکه اولین m آزمایش موفق بوده باشد برابر است با: (برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}$ ۲) $\binom{n}{k}p^{m+k}q^{n-k}$

۳) $\binom{m+n}{k}p^{m+k}q^{n-k}$ ۴) $\binom{m+n}{k}p^{m+k}q^{n-k}$

۲ـ از ظرفی شامل ۴ مهره سفید و ۲ مهره مشکی،مهره‌ها را یکی یکی، بدون جایگذاری و به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه دومین مهره مشکی در انتخاب چهارم به دست آید، چقدر است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{3}{10}$ ۳) $\frac{4}{10}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۳ـ دو عدد x و y بطور تصادفی بین صفر و یک انتخاب می‌شوند. فرض می‌کنیم که A و B دو واقعه به صورت $A=\{x<0/5\};B=\{x>y\}$ باشند. احتمال $P[A|B]$ برابر کدام گزینه است؟ (برق ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۴ـ پنج دانشجوی رشته برق، سه دانشجوی رشته کامپیوتر و دو دانشجوی رشته شیمی به تصادف روی ۱۰ صندلی که در یک ردیف قرار دارند می‌نشینند. احتمال آنکه تمام دانشجویان هم رشته کنار هم باشند چیست؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{210}$ ۲) $\frac{1}{252}$ ۳) $\frac{1}{330}$ ۴) $\frac{1}{420}$

۵ـ ظرفی شامل یک توپ قرمز و ۳ توپ سیاه است. بازیکن‌های A و B بطور متوالی و هر دفعه یک توپ به تصادف از جعبه خارج می‌کنند تا زمانی که یک توپ قرمز انتخاب شود. اگر A بازی را شروع کند و انتخاب بدون جایگذاری باشد، احتمال برنده شدن A چقدر است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{9}$

۶ـ ظرفی شامل ۵۲ توپ شماره‌گذاری شده از ۱ تا ۵۲ است. توپها را یکی‌یکی استخراج و بین چهار بازیکن $j=1,2,3,4$ توزیع می‌کنیم. به این ترتیب که توپهای شماره $j+4k$، که در آن $k=0,1,2,\dots,12$ مراحل توزیع را مشخص می‌کند، به بازیکن j ام داده می‌شود. اگر توپهای ۱، ۱۱، ۳۱، ۴۱ به عنوان توپهای بخت خوب (خوش‌یمن) در نظر گرفته شده باشند، احتمال اینکه هر بازیکن یک توپ بخت خوب را به چنگ آورد چیست؟ (برق ـ سراسری ۸۰)

۱) $\frac{(13)^3}{17\times 25\times 49\times 4}$ ۲) $\frac{(13)^3}{17\times 25\times 49}$ ۳) $\frac{(13)^3}{17\times 50\times 49\times 4}$ ۴) $\frac{(13)^3}{17\times 50\times 49\times 4}$

۷ـ فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای Ω هستند، به طوری که $P(A)=0/2, P(B)=0/4$ و $P(A\cap B)=0/06$ است. در این صورت $P(A\cap\overline{B})$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۴ ۴) ۰/۱۷

۸ـ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، احتمال اینکه هیچکدام اتفاق نیفتند برابر با a و احتمال اینکه B اتفاق افتد برابر b باشد. آنگاه احتمال اینکه A اتفاق افتد کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) $P(A)=\frac{a}{1-b}$ ۲) $P(A)=\frac{b-a}{1-b}$ ۳) $P(A)=\frac{a-b}{1-b}$ ۴) $P(A)=\frac{1-b-a}{1-b}$

۹ـ احتمال آنکه یک تصادف اتومبیل در سال برای یک فرش فروش یا یک کارمند رخ دهد به ترتیب برابر با $P_1=0/6$ و $P_2=0/6$ است. اگر تعداد کارمندان ۵ برابر تعداد فرش فروشان باشند و یک نفر به تصادف از بین کل افراد دو گروه انتخاب شود، احتمال آنکه این شخص در سال دوم تصادف کرده باشد، با فرض آنکه در سال اول نیز تصادف کرده باشد کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۰)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۲۲۵ ۴) ۰/۵۲۲

۱۰ـ ظرفی حاوی ۱۰ توپ سفید و ۱۰ توپ سیاه است. هر بار ۲ توپ به تصادف و بدون جایگذاری از ظرف بیرون می‌آوریم تا زمانی که همه توپها بیرون آورده شوند. احتمال آنکه در هر مرحله، یک توپ سفید و یک توپ سیاه بیرون آورده شود، کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{(10!)^2}{20!}$ ۲) $\frac{2^{10}(10!)^2}{20!}$ ۳) $\frac{2^{10}(10!)}{20!}$ ۴) $\frac{(10!)^2}{2^{10}(20!)}$

۱۱ـ در پاسخ دادن به یک سؤال در یک آزمون m گزینه‌ای امتحان دهنده یا جواب را می‌داند و یا حدس می‌زند. فرض کنید P احتمال آن باشد که او جواب را می‌داند و $1-P$ احتمال آن باشد که آن را حدس می‌زند. فرض کنید:
احتمال جواب صحیح دادن به یک سؤال برای امتحان دهنده‌ای که حدس می زند برابر $\frac{1}{m}$ است. احتمال شرطی اینکه یک امتحان دهنده جواب یک سؤال را می‌دانسته، با فرض اینکه آنرا به طور صحیح پاسخ داده باشد، چیست؟ (برق ـ سراسری ۸۱)

۱) $\frac{1}{\frac{1}{m}+P}$ ۲) $\frac{P}{1+\frac{1}{m}(1-P)}$ ۳) $\frac{1}{P+\frac{1}{m}+(1-P)}$ ۴) $\frac{mP}{1+(m-1)P}$

۱۲ـ بیت‌های تصادفی، یکی یکی از یک خط مخابراتی تک بیتی ارسال می‌شوند، بطوریکه هر بیت ارسالی با احتمال P "۰" است. اگر هر بیت ارسالی تا رسیدن به گیرنده با احتمال ε تغییر وضعیت دهد، یک بیت دریافتی در گیرنده با چه احتمالی "۰" است؟ (برق ـ سراسری ۸۲)

۱) $P\varepsilon$ ۲) $p+\varepsilon$ ۳) $p+\varepsilon-2p\varepsilon$ ۴) $1-p-\varepsilon+2p\varepsilon$

۱۳ـ اگر A و B دو پیش آمد باشند بطوریکه: $P(A\cap B)=\frac{5}{100}, P(A\cap\overline{B})=\frac{45}{100}$

$P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{10}$

($\overline{A}$ یعنی مکمل A) آنگاه: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=0/2$, $P(B|\overline{A})=0/1$

۲) $P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}$, $P(B|A)=0/1$, $P(A|B)=0/2$

۳) $P(B|\overline{A})=0/2$, $P(B|A)=0/1$, $P(A|B)=\frac{1}{3}$

۴) $P(A|B)=0/1$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$, $P(B|\overline{A})=0/2$

۱۴ـ کیسه‌ای شامل ۱۰ گلوله با شماره‌های ۰، ۱، ۲، . . . تا ۹ است. گلوله‌ای را بطور تصادفی انتخاب کرده و شماره آن را بررسی می‌کنیم. احتمال آنکه شمارهٔ گلوله فرد بوده و مضرب ۳ نیز باشد چقدر است؟ *(برق ـ سراسری ۸۳)*

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۴

۱۵ـ درس شبکه‌های کامپیوتری به احتمال ۶۰% در ترم آینده ارائه خواهد شد. اگر این درس ارائه شود، مهشید به احتمال ۷۰% در بیش از ۱۸ واحد ثبت‌نام خواهد کرد، و اگر ارائه نشود، مهشید به احتمال ۵۰% در بیش از ۱۸ واحد ثبت‌نام خواهد کرد. اگر پس از شروع ترم مهشید در بیش از ۱۸ واحد ثبت‌نام کرده باشد، احتمال آنکه درس شبکه‌های کامپیوتری ارائه شده باشد برابر است با: *(کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)*

۱) ۳۳%
۲) ۵۰%
۳) ۶۷%
۴) داده‌های مسئله برای محاسبهٔ مورد نظر کافی نیست.

۱۶ـ اگر A و B دو پیش‌آمد باشند به طوریکه $P(\overline{A}\cap B)=۰/۱$ و $P(A\cap \overline{B})=۰/۲$ و $P(A\cap B)=۰/۵$ و $P(\overline{A}\cap\overline{B})=۰/۲$ آنگاه: *(کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)*

۱) A,B مستقل نیستند و $P(A|B)=۰/۸۳$
۲) A,B مستقل هستند و $P(A|B)=۰/۷$
۳) A,B مستقل هستند و $P(A|B)=۰/۸۳$
۴) A,B مستقل نیستند و $P(A|B)=۰/۷$

۱۷ـ کاسه‌ای دارای b گلوله سیاه و r گلوله قرمز است. گلوله‌ای به تصادف بیرون می‌کشیم و هر رنگی که در آمد ضمن برگرداندن گلوله به کاسه c گلوله از همان رنگ به کاسه اضافه می‌کنیم و سپس یک گلوله بیرون می‌کشیم. اگر بدانیم گلوله دوم قرمز است احتمال آنکه گلوله اول سیاه بوده باشد، کدام است؟ *(برق ـ سراسری ۸۴)*

۱) $\frac{r}{b+r+c}$ ۲) $\frac{b}{b+r+c}$ ۳) $\frac{b+c}{b+r+c}$ ۴) $\frac{r+c}{b+r+c}$

۱۸ـ یک سیستم کامپیوتری دارای سه بخش C,B,A است. احتمال آنکه C,B,A هر یک بدون خرابی به مدت ۱۰۰ ساعت کار کند بترتیب ۹۰% ، ۸۰% و ۷۰% است. احتمال آنکه C,B هر دو به مدت ۱۰۰ ساعت کار کنند. ۶۰% است. کارکرد بخش A مستقل از کارکرد بخشهای C,B است. برای آنکه این سیستم کار کند باید بخش A وحداقل یک از بخشهای C,B کار کنند. در این صورت احتمال آنکه این سیستم بدون خرابی به مدت ۱۰۰ ساعت کار کند برابر است با : *(کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)*

۱) ٪۶۸ ۲) ٪۷۵ ۳) ٪۸۱ ۴) ٪۸۶

۱۹ـ اگر بخواهیم ۱۰ توپ متفاوت را درون ۱۲ ظرف بریزیم احتمال این را بیابید که در هیچ ظرفی بیش از ۱ توپ نباشد. *(مؤلف)*

۱) $\frac{\binom{۱۲}{۱۰}}{۱۲!}$ ۲) $\frac{\binom{۱۲}{۱۰}}{۱۲^{۱۰}}$ ۳) $\frac{\binom{۱۲}{۱۰}\times ۱۰!}{۱۲^{۱۰}}$ ۴) $\frac{\binom{۱۲}{۱۰}\times ۱۲!}{۱۲^{۱۰}}$

۲۰ـ تعداد ۵ جعبه مفروض است که در هر یک گلوله‌هایی با شماره ۱ تا ۱۲ موجود است. اگر از هر جعبه یک گلوله به طور تصادفی انتخاب شود احتمال اینکه دست کم دو گلوله هم شماره باشد کدام است؟ *(مؤلف)*

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۹ ۴) ۰/۹۹

پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل دوم

۱ـ گزینه «۱»

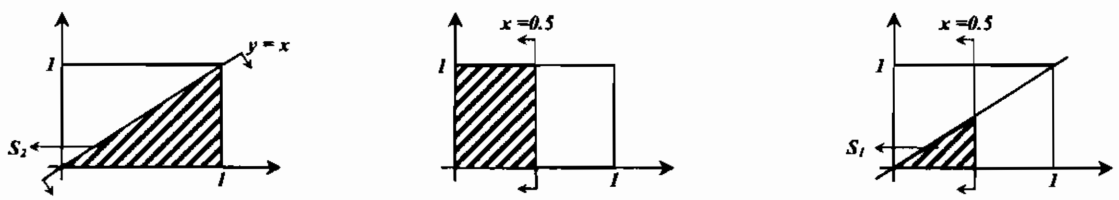
$$P(\text{آزمایش موفق } m+k \mid \text{اولین } m \text{ آزمایش موفق}) = \frac{\binom{n}{k}p^{m+k}q^{n-k}}{p^m} = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

۲ـ گزینه «۴» اولین مهره مشکی در سومین انتخاب + اولین مهره مشکی در دومین انتخاب + اولین مهره مشکی در اولین انتخاب = P

$$P=\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۶}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۲}{۴}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{۵}$$

۳ـ گزینه «۳»

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\text{سطح } S_1}{\text{سطح } S_2}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴}$$



$B=\{x>y\}$ $A=\{x<۰/۵\}$ $A\cap B=\{x>y, x<۰/۵\}$

۴ـ گزینه «۴» دانشجویان هم رشته را مثل یک نفر در نظر می‌گیریم:

$$P=\frac{۵!۳!۲!۳!}{۱۰!}=\frac{۱}{۴۲۰}$$

۵ـ گزینه «۱» تابع به این صورت است که ممکن است در مرحله اول فرد A توپ قرمز را بیرون بیاورد یا در مرحله اول توپ قرمز توسط شخص A بیرون نیاید پس باید توپ سیاه را برداشته باشد و . . .

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}+\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$$

۶ـ گزینه «۲»

$$n(s)=\text{کل حالات توزیع ۵۲ توپ}=\frac{۵۲!}{۱۳!\,۱۳!\,۱۳!\,۱۳!}$$

$$n(A)=\text{حالات مساعد برای توزیع توپها}=\underbrace{\frac{۴۸!}{۱۲!\,۱۲!\,۱۲!\,۱۲!}}_{\text{توزیع ۴۸ توپ باقیمانده}}\times\underbrace{\frac{۴!}{۱!\,۱!\,۱!\,۱!}}_{\text{توزیع ۴ توپ خوش شانس}}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۴۸!}{۱۲!\,۱۲!\,۱۲!\,۱۲!}\times ۴!}{\frac{۵۲!}{۱۳!\,۱۳!\,۱۳!\,۱۳!}}=\frac{(۱۳)^۳}{۱۷\times ۲۵\times ۴۹}$$

۷ـ گزینه «۳»

$$P(A\cap\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0/2-0/06=0/14$$

◆◆◆◆

۸ـ گزینه «۴»

$$P(A'\cap B')=a=P(A')P(B')=P(A')(1-b)\Rightarrow P(A')=\frac{a}{1-b}\Rightarrow P(A)=1-\frac{a}{1-b}=\frac{1-b-a}{1-b}$$

◆◆◆◆

۹ـ گزینه «۲»

$$P(\text{سال دوم تصادف کرده باشد}\mid\text{سال اول تصادف کرده})=\frac{P(\text{سال اول , سال دوم})}{P(\text{سال اول})}=\frac{P(\text{سال دوم})\times P(\text{سال اول})}{P(\text{سال اول})}=0/6$$

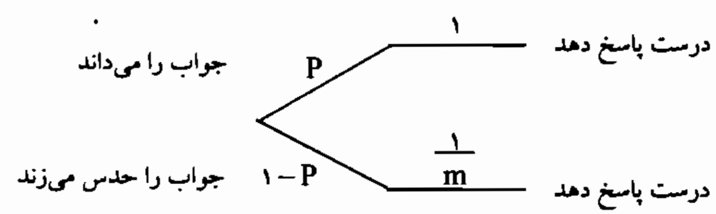
◆◆◆◆

۱۰ـ گزینه «۲»

$$\frac{\binom{10}{1}\binom{10}{1}}{\binom{20}{2}}\times\frac{\binom{9}{1}\binom{9}{1}}{\binom{18}{2}}\times\cdots\times\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{2}{2}}=\frac{10^2}{\frac{20\times19}{2}}\times\frac{9^2}{\frac{18\times17}{2}}\times\cdots\times\frac{1^2}{\frac{2\times1}{2}}=\frac{(10!)^2}{\frac{20!}{2^{10}}}=\frac{2^{10}(10!)^2}{20!}$$

◆◆◆◆

۱۱ـ گزینه «۴» قضیه بیز:



$$P(\text{جواب را می‌دانسته}\mid\text{جواب درست})=\frac{P(\text{جواب درست و جواب درست را می‌دانسته})}{P(\text{جواب درست})}=\frac{p\times1}{p\times1+(1-p)\frac{1}{m}}=\frac{mp}{1+(m-1)p}$$

◆◆◆◆

۱۲ـ گزینه «۳»

$$P(\text{دریافت "0" در گیرنده})=P\times(1-\varepsilon)+(1-P)\varepsilon=P-P\varepsilon+\varepsilon-P\varepsilon=P+\varepsilon-2P\varepsilon$$

◆◆◆◆

۱۳ـ گزینه «۳»

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')=0/5$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=0/15$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/05}{0/15}=\frac{1}{3}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0/05}{0/5}=0/1$$

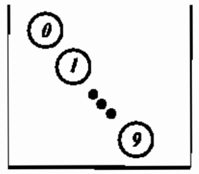
◆◆◆◆

۱۴ـ گزینه «۳»

$$n(S)=\text{تعداد کل حالات}=\{0,1,2,\cdots,9\}=10$$

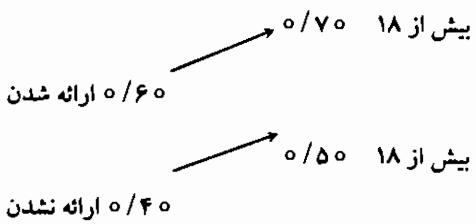
$$n(A)=\text{تعداد اعداد فرد و مضرب ۳}=\{3,9\}=2$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{10}$$



◆◆◆◆

۱۵ـ گزینه «۳» با توجه به قضیه بیز



$$\Rightarrow P=\frac{0/6\times0/70}{0/6\times0/70+0/40\times0/50}=0/67$$

◆◆◆◆

۱۶ـ گزینه «۱»

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B)=0/7$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A\cap B)=0/6$$

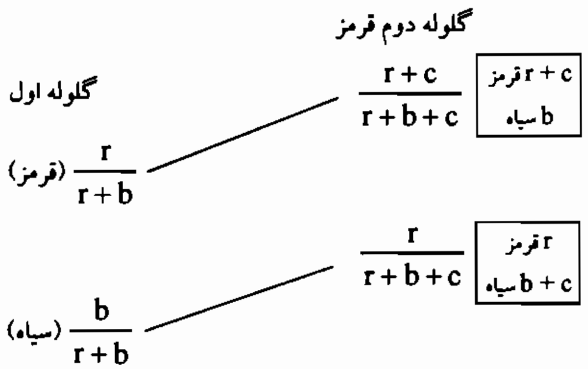
$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)\Rightarrow A,B\ \text{مستقل نیستند}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/5}{0/6}=0/83$$

◆◆◆◆

۱۷ـ گزینه «۲» قضیه بیز:

$$P(\text{گلوله اول سیاه}\mid\text{گلوله دوم قرمز})=\frac{P(\text{گلوله دوم قرمز و گلوله اول سیاه})}{P(\text{گلوله دوم قرمز})}=\frac{\frac{b}{r+b}\times\frac{r+c}{r+b+c}}{\frac{r}{r+b}\times\frac{r+c}{r+b+c}+\frac{b}{r+b}\times\frac{r}{r+b+c}}=\frac{b}{r+b+c}$$



◆◆◆◆

۱۸ـ گزینه «۳»

$$P(\text{احتمال کارکردن})=P\big(A\cap(B\cup C)\big)=P(A)\times[P(B)+P(C)-P(B\cap C)]=0/9\times[0/8+0/7-0/6]=0/81$$

◆◆◆◆

۱۹ـ گزینه «۳»

◆◆◆◆

۲۰ـ گزینه «۱»

◆◆◆◆

آزمون فصل دوم

۱ـ عبارت $\sum_{i=0}^{n}\binom{i+r-1}{i}$ با کدامیک از عبارات زیر برابر است؟

۱) $\binom{n}{r}$ ۲) $\binom{n+r}{r}$ ۳) $\binom{n}{i}$ ۴) $\binom{n+r-1}{n}$

۲ـ اگر مجموعه‌های A، B، C و D را بصورت زیر تعریف کنیم.

$A=\{2,3,4\}\ ,\ B=\{1,3,4\}\ ,\ C=\{1,2,2\}\ ,\ D=\{1,2,3\}$

چند حالت برای (a,b,c,d) وجود دارد بصورتیکه تکرار مجاز نباشد و $d\in D$ و $c\in C$ و $b\in B$ و $a\in A$ باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۸

۳ـ در یک سیستم الکترونیکی، برای ارسال ۱۰۰۰ پیغام به چند کلید احتیاج داریم (هر کلید می‌تواند مقدار صفر یا یک را بگیرد)؟

۱) ۵۰۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۹

۴ـ چهار نفر قصد دارند برای تهیه بلیط به ۴ آژانس D,C,B,A مراجعه کنند به چند حالات آژانس A دقیقاً یک نفر مراجعه کننده دارد؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۸ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۹۲

۵ـ به چند طریق می‌توان ۷ نفر را در ۲ اتاق دونفری قرار داد بصورتیکه دو نفر خاص بخواهند با هم در یک اتاق باشند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۶۴ ۴) ۳۵۶

۶ـ اگر امروز با احتمال ۰/۹ باران ببارد و فردا با احتمال ۰/۸ باران ببارد، احتمال اینکه هم امروز و هم فردا باران ببارد چقدر است؟

۱) ۰/۷۲ ۲) ۰/۷ ۳) حداقل ۰/۷ ۴) هیچ اظهار نظری نمی‌توان کرد

۷ـ اگر A و B پیشامدهای ناسازگار باشند و احتمال پیشامد $(A\cup B)$ صفر نباشد مطلوب است مقدار $P(A|A\cup B)$:

۱) $\frac{P(A)}{P(A)P(B)}$ ۲) صفر ۳) $P(A)$ ۴) $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

۸ـ ۲۰ مهره مشابه را در ۵ جعبه قرار می‌دهیم. در چند حالت در جعبه بخصوصی تنها یک مهره قرار می‌گیرد؟

۱) $\binom{24}{5}$ ۲) $\binom{22}{3}$ ۳) $5\binom{22}{3}$ ۴) $5!\binom{22}{3}$

۹ـ فرض کنید شخصی به طور تصادفی گاهی به سمت راست یا چپ بر می دارد که جهت گام‌ها مستقل از هم می باشد احتمال این که بعد از ۲ گام برداشتن این شخص در جای فعلی باشد چه‌قدر است؟

۱) $P^2(1-P)^2$ ۲) $2P(1-P)$ ۳) $P(1-P)^2$ ۴) P^2

۱۰ـ سه عدد صحیح بصورت تصادفی از کوچکترین ۲۰ عدد مثبت متفاوت انتخاب می‌شود احتمال اینکه حاصل ضرب آنها زوج باشد برابر است با:

۱) ۰/۸۹۴۷ ۲) ۰/۲۳۶۸ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۷۵

۱۱ـ دو فرد A , B همزمان به سمت هدفی تیراندازی می کنند اگر احتمال اصابت تیر به هدف برای هر کدام برابر $\frac{1}{2}$ باشد. و آن‌گاه بدانیم تیری به هدف خورده است چه‌قدر احتمال دارد هر دو نفر هدف را مورد اصابت قرار داده‌اند؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۲ـ در ظرفی ۲۰ مهره وجود دارد که ۴ سیاه و ۱۰ سفید ۳ آبی و ۳ قرمز وجود دارد. ۴ نفر به ترتیب هر کدام یک مهره بدون جای گذاری انتخاب می کنند. چقدر احتمال دارد نفر اول مهره سفید بعدی مهره سفید و نفر سوم مهره آبی و آخری مهره قرمز انتخاب کند؟

۱) ۰/۰۰۷ ۲) ۰/۰۴۱ ۳) ۰/۰۰۳ ۴) ۰/۰۰۶

۱۳ـ شخصی دارای n کلید است که یکی از این کلید ویژه درب اصلی است حال فرض کنید شخص قصد دارد درب اصلی را باز کند لذا کلیدها را یک به یک چک کرده و اگر کلید متعلق به درب نباشد کنار گذاشته می شود تا به کلید اصلی برسد چه‌قدر احتمال دارد در rاُمین انتخاب درب باز شود؟

۱) $\frac{1}{n}$ ۲) $\frac{r}{n}$ ۳) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^r$ ۴) $\left(\frac{1}{n}\right)^r$

۱۴ـ قرار است که یک کمیته ۵ نفری از ۶ مرد و ۴ زن تشکیل شود تعداد حالاتی که تعداد مردان از تعداد زن‌ها در کمیته کم‌تر باشد چه‌قدر است؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸۰ ۴) ۶۶

۱۵ـ احتمال اینکه در چهارمین پرتاب مستقل ۳ سکه سالم برای بار دوم ۳ شیر و یا ۳ خط بیاید کدام است؟

۱) $\frac{3}{256}$ ۲) $\frac{9}{256}$ ۳) $\frac{27}{256}$ ۴) $\frac{81}{256}$

۱۶ـ اگر بخواهیم با حروف AAAABBBCCDD کلمه‌ای <u>۱۱</u> حرفی بسازیم احتمال این را بیابید که هیچ کدام از B ها کنار هم نباشند.

۱) $\frac{10}{55}$ ۲) $\frac{30}{55}$ ۳) $\frac{14}{55}$ ۴) $\frac{28}{55}$

۱۷ـ فرض کنید ۱۰ نفر به مهمانی دعوت شده‌اند که قرار است در یک ردیف بنشینند حال اگر دو شخص A , B بخواهند کنار هم باشند و D,C نخواهند کنار هم باشند این ترتیب به چند حالت امکان پذیر است؟

۱) ۵۸۹۶۰۰ ۲) ۳۴۶۷۵۲۰ ۳) ۵۶۴۴۸۰ ۴) ۴۳۱۲۲۰

۱۸ـ فرض کنید ۵ دختر و ۵ پسر قصد دارند روی ۱۰ صندلی در یک ردیف قرار بگیرند چه‌قدر احتمال دارد روی صندلی پنجم یک دختر باشد و دقیقاً کنار دست راست وی یک پسر قرار داشته باشد؟

۱) ۰/۰۰۴ ۲) ۰/۲۷۷۸ ۳) ۰/۵۵۵۶ ۴) ۰/۱۷۷۸

۱۹ـ یک نمونه ۳تایی به این ترتیب بدست می‌آید که ابتدا با یک ظرف شامل ۵ توپ سفید و ۷ توپ قرمز شروع می کنیم و در هر بار که یک توپ از این ظرف خارج می‌شود به همراه توپ دیگری از همان رنگ در داخل ظرف قرار داده می‌شود. احتمال اینکه دقیقاً یک توپ سفید در نمونه سه‌تایی فوق باشد کدام است؟

۱) $\frac{3}{13}$ ۲) $\frac{5}{13}$ ۳) $\frac{3}{52}$ ۴) $\frac{5}{52}$

۲۰ـ در پرتاب یک جفت تاس احتمال اینکه مجموع «عدد اول» قبل از مجموع ۸ بیاید را بیابید.

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{18}$ ۳) $\frac{13}{18}$ ۴) $\frac{14}{19}$

۲۱ـ از مجموعه اعداد $\{1,2,\ldots,100\}$ دو عدد بصورت تصادفی و با جایگذاری انتخاب می کنیم. احتمال اینکه اولین عدد انتخاب شده بزرگتر از دومین عدد انتخاب شده باشد چقدر است؟

۱) $\frac{55}{100}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{45}{200}$ ۴) $\frac{99}{200}$

۲۲- ظرفی شامل ۴ مهره آبی ۵ مهره سیاه و ۱ مهره سفید است دو مهره به این صورت انتخاب می‌کنیم که در هر بار استخراج مهره با مشاهده رنگ آن مهره را به همراه یک مهره دیگر از همان رنگ به داخل ظرف باز می‌گردانم چقدر احتمال دارد هر دو ۲ توپ خارج شده همرنگ باشند؟

۱) ۰/۴۷۳ ۲) ۰/۹۴۵ ۳) ۰/۳۷۴ ۴) ۰/۴۱۲

۲۳- چهارده سکه پنج ریالی و یک سکه طلا در یک کیسه و ۱۵ سکه پنج ریالی در کیسه دیگر است. پنج سکه از کیسه اول انتخاب و به کیسه دوم ریخته می‌شود (این عمل کاملاً تصادفی است). سپس پنج سکه از کیسه دوم انتخاب (تصادفی) و به کیسه اول بازگردانده می‌شود. احتمال اینکه پس از این نقل و انتقالات سکه طلا در کیسه اول باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۲۴- فرض کنید A و B دو زیرمجموعه مستقل از یک مجموعه N عضوی باشند $P(A \subset B)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $(\frac{3}{4})^N$ ۳) $\frac{\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}}{2^N}$ ۴) $\sum_{i=1}^{N}\frac{\binom{N}{i}2^i}{2^N \times 2^N}$

۲۵- می‌خواهیم از بین اعداد {۹, ۷, ۶, ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰} یک عدد ۳ رقمی و بدون تکرار بسازیم. اگر عدد حاصل بزرگتر از ۴۱۰ باشد احتمال این که این عدد بزرگتر یا مساوی ۵۰۰ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{13}{18}$ ۳) $\frac{14}{17}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۲۶- شخصی به تصادف یکی از اعداد صحیح ۱ و ۲ و ۳ را انتخاب می‌کند و سپس به تعداد عدد انتخاب شده یک تاس را پرتاب می‌کند احتمال اینکه مجموع ۵ بیاورد کدام است؟

۱) $\frac{11}{108}$ ۲) $\frac{12}{108}$ ۳) $\frac{13}{108}$ ۴) هیچکدام

۲۷- ظرفی محتوی ۳ مهره آبی و ۷ مهره سفید است. مهره‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم اگر رنگ این مهره سفید باشد آن را دوباره در ظرف قرار می‌دهیم و دو مهره سفید دیگر به ظرف اضافه می‌کنیم. اگر مهره استخراجی آبی باشد آن را در ظرف قرار نداده و مهره دیگری نیز در ظرف قرار نمی‌دهیم. سپس برای بار دوم دو مهره از ظرف بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه دو مهره انتخاب شده در بار دوم سفید باشند کدام است؟

۱) $\frac{39}{72}$ ۲) $\frac{48}{78}$ ۳) $\frac{29}{52}$ ۴) $\frac{49}{88}$

۲۸- در سئوال قبل احتمال اینکه دستگاهی معیوب که به تصادف انتخاب شده است متعلق به عرضه‌کننده A باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{2}{15}$

۲۹- یک ظرف شامل ۳ مهره قرمز و ۷ مهره سفید است. یک مهره از ظرف خارج می‌کنیم و هر رنگی که باشد مهره دیگری از رنگ مخالف آن در ظرف قرار می‌دهیم. سپس مهره دیگری از ظرف خارج می‌کنیم اگر این مهره با مهره قبلی که به دست آمده بود همرنگ باشد احتمال اینکه هر دو سفید باشند کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{7}{8}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۳۰- فرض کنید در شهری ۴ آژانس وجود دارد اگر طی یک روز قرار باشد ۵ مسافر برای تهیه بلیط به این آژانس‌ها مراجعه کنند به چند حالت امکان دارد دقیقاً ۲ آژانس برای تهیه بلیط توسط این مسافرین انتخاب شود؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۹۲ ۳) ۳۶ ۴) ۹۶

۳۱- فرض کنید ۵ جعبه به رنگهای سفید، زرد، سیاه و سبز و آبی داریم. همچنین ۵ توپ نیز به همین رنگ‌ها موجود می‌باشد اگر توپ‌ها به صورت تصادفی داخل جعبه‌ها قرار داده شوند به چند حالت ۳ توپ در جعبه‌هایی با رنگ‌های مخالف خود قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۴۵

۳۲- اگر ۵ نفر بخواهند در یک ردیف بنشینند و قرار باشد که دو نفر A و B دقیقاً با یک نفر فاصله کنار هم باشند تعداد حالات مختلف چقدر است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۳۳- دو تاس را همزمان n بار پرتاب کنیم n چقدر باشد تا احتمال مشاهده حداقل یک بار مجموع ۱۲ برای دو عدد مشاهده شده بیش از $\frac{3}{4}$ باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۲۵ ۳) ۱۰ ۴) ۷۵

۳۴- فرض کنید n توپ متمایز را به تصادف در N ظرف توزیع می‌کنیم احتمال این که m توپ در ظرف اول باشد چقدر است؟

۱) $\frac{\binom{N}{1}\binom{N}{m}(N-1)^n}{N^m}$ ۲) $\frac{\binom{n}{m}(N-1)^{n-m}}{N^n}$ ۳) $\frac{\binom{n-m+N-1}{n-m}}{\binom{n+N-1}{n}}$ ۴) $\frac{(N-1)^{n-m}}{N^n}$

۳۵- اگر بخواهیم ۱۰ مهره نامتمایز را درون ۱۵ ظرف قرار دهیم. چقدر احتمال دارد که در هیچ ظرفی بیش از یک توپ نباشد؟

۱) ۰/۰۲۳ ۲) ۰/۰۰۲۳ ۳) ۰/۰۰۳۲ ۴) ۰/۰۱۸۴

۳۶- در ظرفی ۴ توپ سفید و ۶ توپ قرمز وجوددارد و همچنین در ظرف دیگر ۲۰ توپ وجود دارد که n تای آن سفید است. اگر احتمال انتخاب یک توپ سفید از این دو ظرف برابر $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه مقدار n چقدر است؟

۱) $n=12$ ۲) $n=6$ ۳) $n=10$ ۴) $n=18$

۳۷- در ظرفی ۴ توپ سفید و ۸ توپ سیاه وجود دارد. حال ۲ توپ به طور تصادفی و بدون جایگذاری از این ظرف انتخاب می‌کنیم و بعد از مشاهده رنگ توپ‌های منتخب با توجه به تعداد توپ قرمز (i) در نمونه ۲ تایی به اندازه 2^i توپ از رنگ سیاه به همراه توپهای انتخاب شده به ظرف بازگردانده می‌شود. حال یک توپ از مجموعه توپهای جدید انتخاب می‌کنیم. احتمال این که توپ منتخب سیاه باشد چقدر است؟

۱) ۰/۷۰۸ ۲) ۰/۲۹۲ ۳) ۰/۴۳۹ ۴) ۰/۷۶۸

۳۸- فرض کنید F,E دو پیشامده ناسازگار از یک آزمایش باشند. حال اگر آزمایش‌های ساده مستقل از این نوع را تکرار کنیم. آنگاه احتمال این که E قبل از F اتفاق بیفتد کدام است؟

۱) $P(E)$ ۲) $\frac{P(E)+P(F)}{P(t)}$ ۳) $\frac{P(E)}{P(E)-P(F)}$ ۴) $\frac{P(E)-P(F)}{P(E)}$

۳۹- n توپ داریم که می‌خواهیم در n جعبه قرار دهیم.به طوری که هر توپ با شانس یکسان می‌تواند در یکی از جعبه‌های موجود قرار بگیرد و مستقل از محل قرار گرفتن توپ قبلی باشد آنگاه واریانس تعداد جعبه‌هایی که خالی می‌مانند کدام است؟

۱) $n(1-\frac{1}{n})^{2n}$ ۲) $n(1-\frac{1}{n})^n\left[1-(1-\frac{1}{n})^n\right]$

۳) $n\left[1-\frac{1}{n}\right]^n\left[1-(\frac{1}{n})^n\right]$ ۴) $n\left[1-\frac{1}{n}\right]\left[1-(1-\frac{1}{n})^n\right]$

۴۰ـ فرض کنید ۵ نفر اسامی خود را روی ۵ تکه کاغذ هم شکل و همسان نوشته و ۵ تا را به یک صورت تا کرده به گونه‌ای هیچ تمایزی بین کاغذها نباشد. حال کاغذها را روی زمین ریخته و هر نفر یک کاغذ به تصادف انتخاب کرده حال چقدر احتمال دارد که دقیقاً ۲ نفر آن‌ها کاغذی را بردارند و اسامی خودشان روی کاغذ نوشته شده باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{18}$

۴۱ـ K جعبه داریم که هر یک محتوی n مهره شماره‌های ۱ تا n است. از هر جعبه یک مهره برمی‌داریم. مطلوب است تعداد حالت‌هایی که ۳ کوچک‌ترین عدد انتخاب شده در این K عدد باشد؟

۱) $\sum_{X=1}^{K}\binom{K}{X}$ ۲) $\sum_{x=1}^{K}\binom{K}{X}(n-3)^{K-X}$ ۳) $\sum_{X=1}^{K}\binom{K}{3}(n-K)^{X-3}$ ۴) $\sum_{X=3}^{K}\binom{K}{X}(n-3)^{K-X}$

۴۲ـ فرض کنید K مهره نامتمایز داریم که می‌خواهیم آن‌ها را در r جعبه تقسیم کنیم، چند حالت امکان دارد که در یک جعبه دقیقاً m مهره قرار بگیرد؟

۱) $r\binom{k-m+r-2}{k-m}$ ۲) $r\binom{k-m+r-1}{k-m}$ ۳) $r\binom{k}{m}\binom{k+m-r-1}{k-m}$ ۴) $K\binom{k-m+r-1}{k-m}$

۴۳ـ از بین ۱۰ نفر اعضای یک کمیته ۷ نفر آن‌ها حداقل یک فرزند دارند که بین آن‌ها ۴ نفر هیچ فرزند دختری ندارند. حال چند نفر آن‌ها فاقد فرزند یا حداقل یک دختر دارند؟

۱) ۱۰ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴

۴۴ـ ۰/۹۹ تلویزیون‌های تولید شده در یک شرکت دارای لامپ تصویر سالم هستند. لذا در انتهای خط تولید، تلویزیون‌های تولید شده تحت آزمایش قرار گرفته تا صحت سالم یا معیوب بودن لامپ تصویر را تست نماید که در ۰/۹۵ موارد آزمایش درست تشخیص می‌دهد. حال چنددرصد تلویزیون‌ها بعد از تست سالم تشخیص داده می‌شوند؟

۱) ۰/۹۴ ۲) ۰/۹۵ ۳) ۰/۹۹ ۴) ۰/۹۷

۴۵ـ از گروهی متشکل از ۸ زن و ۶ مرد شورایی مرکب از ۳ زن و ۳ مرد بایستی تشکیل شود این کار به چند طریق امکان‌پذیر است هرگاه ۲ نفر از مردها نخواهند با هم انتخاب شوند؟

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۸۹۶ ۳) ۷۹۲ ۴) ۸۴۲

۴۶ـ زوجی دارای دو فرزند است. احتمال این که هر دو دختر باشند به شرط این که فرزند بزرگتر دختر است کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{7}$

۴۷ـ ۴ پسر و ۳ دختر چگونه می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند به طوری که هیچ دو دختری یا دو پسری کنار هم قرار نگیرند؟

۱) ۱۲۱ ۲) ۱۴۴ ۳) ۵۰۴۰ ۴) ۱۰۲

۴۸ـ در بسط $(X+Y)^5$ ضریب جمله x^2y^3 کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۱۰ ۴) ۴

۴۹ـ به چند طریق ۴ دانش آموز می‌توانند در ۲ دبیرستان متفاوت ثبت نام داشته باشند؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵۶ ۴) ۶۴

۵۰ـ یک سکه را ۵ بار پرتاب می‌کنیم به چند حالت امکان دارد اختلاف بین تعداد شیرها و خط‌های ظاهر شده دقیقاً برابر ۱ باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

۵۱ـ از بین ۵ مهندس صنایع، ۶ نفر مهندس مکانیک، ۷ نفر مهندس مواد قصد داریم، سه نفر برای پست مدیریت، معاونت و سرپرست تولید انتخاب کنیم. این مورد به چند حالت امکان دارد؟(توجه از هر گروه دقیقاً یک نفر انتخاب شود)

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۲۶۰ ۳) ۶۳۰ ۴) ۷۴۰

۵۲ـ در سوال قبل اگر برای پست مدیریت فقط از گروه مهندسی صنایع حق انتخاب داشته باشیم، آنگاه تعداد حالات کل این انتخاب کدام است؟

۱) ۴۲۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۱۲۶۰ ۴) ۶۳۰

۵۳ـ فرض کنید قصد داریم ۱۵ سیب را بین ۵ بچه تقسیم کنیم، به طوریکه به هر بچه حداقل یک سیب برسد. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۰۰۱ ۲) ۳۸۷۶ ۳) ۲۰۰۲ ۴) ۱۱۶۲۸

۵۴ـ به چند طریق می‌توان ۸ نفر را در ۴ اتاق ۲ نفره تقسیم کرد؟

۱) ۴۰۳۲۰ ۲) ۲۵۲۰ ۳) ۵۲۱۰ ۴) ۲۵۶

۵۵ـ از گروهی متشکل از ۵ زن و ۷ مرد می‌خواهیم شورایی مرکب از ۲ مرد و ۲ زن را تشکیل دهیم. حال اگر ۲ مرد نخواهند با هم انتخاب شوند به چند طریق می‌توان این شورا را تشکیل داد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۰۰۰

۵۶ـ اگر $P(A)=0/3\ ,\ P(B)=0/4\ ,\ P(E\mid A)=0/1\ ,\ P(E'\mid B)=0/8$ می‌باشد احتمال E چقدر است؟

۱) ۰/۱۱ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۳۵

۵۷ـ در یک سطح ۱۵ نقطه وجود دارد به چند حالت می‌توان در این سطح مثلث رسم نمود به طوری که هر رأس آن یک نقطه از نقاط موجود باشد؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۵۵ ۳) ۵۱۰ ۴) ۴۳۵

۵۸ـ در بازرسی نشان داده شده است که ۹۶٪ یک کالا طبق استاندارد می‌باشد. بازرسی ساده واحد، کالای استاندارد را با احتمال ۰/۹۵ مرغوب تشخیص می‌دهد و محصول غیر استاندارد را با احتمال ۰/۸۰ مرغوب تشخیص می‌دهد. احتمال اینکه واحد کالای بازرسی شده استاندارد تشخیص داده شود چقدر است؟

۱) ۰/۹۱۵ ۲) ۰/۹۹۶ ۳) ۰/۶۵۱ ۴) ۰/۷۲۰

۵۹ـ در سؤال قبل چقدر احتمال دارد یک کالا واقعاً معیوب باشد به شرطی که بازرسی آن را سالم تشخیص داده است؟

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۰۳۲ ۳) ۰/۰۰۳ ۴) ۰/۰۷۷

۶۰ـ کدام یک از تعاریف زیر مفهوم احتمال از طریق آماری را بیان می‌کند:

۱) حد فراوانی نسبی وقتی که تعداد آزمایش‌ها به طور نامحدود افزایش یابد را احتمال به طریق آماری گویند.

۲) وقتی که تعداد آزمایش‌ها از ۳۰ بزرگ‌تر باشد فراوانی نسبی به عددی نزدیک می‌شود که احتمال به طریق آماری گویند.

۳) عددی که فراوانی‌های نسبی حادثه برای تعداد مشاهدات به اندازه کافی زیاد در حول آن متمرکز می‌شوند مفهوم احتمال به طریق آماری را بیان می‌کند.

۴) در تعداد آزمایش‌های محدود نسبت حالت‌های مساعد به حالت‌های ممکن وجود داشته باشد.

۶۱ـ در سؤال قبل به چند حالت امکان دارد حداقل یک نامه را اشتباه به صاحبانش برساند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۹۴ ۳) ۱۱۹ ۴) ۱۲۵

۶۲ـ فرض کنید ۵ متغیر داریم که می‌خواهیم حاصل جمع آنها برابر ۳۰ باشد و از طرفی می‌خواهیم این متغیرها عدد صحیح مثبت و مضربی از ۲ باشند به چند حالت این امر امکان پذیر است؟

۱) ۳۸۷۶ ۲) ۸۲۱۳ ۳) ۲۰۰۲ ۴) ۱۰۰۱

۶۳ـ آسانسوری شامل ۱۲ نفر افراد نامتمایز داریم که از همکف برای طبقه اول تا پنجم بالا رفته و مسافرین را در طبقات مختلف پیاده می‌کنند. چقدر احتمال دارد فقط در طبقه دوم، سوم، پنجم متوقف شود؟

۱) ۰/۰۲۰۳ ۲) ۰/۰۳۰۲ ۳) ۰/۰۴۰۱ ۴) ۰/۰۱۰۲

۶۴ـ در سؤال قبل اگر بین افراد تمایز وجود داشته باشد چقدر احتمال دارد که در طبقه دوم ۴ نفر و طبقه سوم ۴ نفر و در طبقه ۴ و ۵ هر طبقه ۲ نفر پیاده شوند؟

۱) $۰/۸۵\times۱۰^{-۳}$ ۲) $۰/۱۴\times۱۰^{-۳}$ ۳) $۰/۴۲\times۱۰^{-۳}$ ۴) $۰/۵۸\times۱۰^{-۳}$

۶۵ـ در فاصله $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ یک مقدار انتخاب می‌کنیم چقدر احتمال دارد sin این مقدار بیشتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۶۶ـ اگر B,A پیشامدهای ناسازگار باشد آنگاه احتمال $P(A|B)$ کدام است؟

۱) $P(A)$ ۲) $P(A)P(B)$ ۳) صفر ۴) $\frac{P(A)}{P(B)}$

۶۷ـ یک بازی بین سه نفر به این صورت اجرا می‌شود که هر سه نفر سه سکه را پرتاب کرده و اگر همه سکه‌ها خط یا شیر بیاید آن شخص برنده است. حال اگر ترتیب انجام بازی از A شروع و سپس B و سپس C ادامه یابد و در صورتی که برنده نداشته باشد مجدداً تکرار شود چقدر احتمال دارد نفر A برنده شود؟

۱) ۰/۳۱۴ ۲) ۰/۴۳۲ ۳) ۰/۵۷۱ ۴) ۰/۴۸۲

۶۸ـ مقدار عبارت $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(a-1)^{i}$ برابر کدام است؟

۱) a^n ۲) $(a-۱)^n$ ۳) $a^n-۱$ ۴) $(a+۱)^n$

۶۹ـ در ظرفی n توپ شماره دار سیاه و سفید موجود است، به چند طریق آن‌ها را می‌توان دور یک دایره قرار داد؟

۱) $(n-۲)!$ ۲) $(n-۲)!$ ۳) $(n-۲)!(n-۳)$ ۴) $(n-۲)!(n-۱)$

۷۰ـ اگر ۴ نفر در اتاقی نشسته باشند احتمال این را بیابید که هیچ یک در یک ماه بدنیا نیامده باشند.

۱) ۰/۴۶ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۵۱ ۴) ۰/۵۷

مدرسان شریف

فصل سوم

« متغیرهای تصادفی »

تعریف: یک متغیر تصادفی تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی است به طوری که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد. برای نمایش متغیر تصادفی از یکی از حروف بزرگ مانند X و Y و... استفاده می‌شود و برای نمایش مقادیر یک متغیر تصادفی از حروف کوچک معادل آن یعنی x و y و... استفاده می‌شود.

متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته

متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر باشد را متغیر تصادفی گسسته و متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامند.

متغیرهای تصادفی زیر از نوع گسسته‌اند:

الف ـ در پرتاب دو تاس متغیر تصادفی X نشان دهنده تفاضل دو عدد ظاهر شده باشد.

ب ـ در پرتاب یک سکه ۲ بار متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تعداد شیرها باشد.

متغیرهای تصادفی زیر از نوع پیوسته‌اند:

الف ـ در فاصله $[۰,a]$ نقطه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر با نقطه انتخاب شده در نظر می‌گیریم.

ب ـ طول عمر یک قطعه الکتریکی

متغیرهای تصادفی گسسته (توزیع احتمالات گسسته)

تعریف: تابع $f_X(x)=P(X=x)$ را تابع احتمال متغیر تصادفی X گویند هرگاه:

۱ـ برای هر $x\in R$ داشته باشیم که $f_X(x)\geq ۰$

۲ـ $\sum_{x\in R} f_X(x)=۱$

توجه کنید که تابع احتمال می‌تواند به ما احتمال وقوع هر نقطه متناظر با متغیر تصادفی گسسته را بدهد برای محاسبه احتمال پیشامد $(X\in A)$ که A زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$P(X\in A)=\sum_{x\in A} f_X(x)$$

مثال ۱: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و متغیر X را برابر با مجموع اعداد روی دو تاس مشاهده شده در نظر می‌گیریم.

الف ـ تابع احتمال X را بدست آورید.

ب ـ احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر ۵ باشد را بدست آورید.

ج ـ احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس بین ۷ و ۹ شود را بدست آورید.

پاسخ: الف ـ متغیر تصادفی X می‌تواند مقادیر $\{2,3,...,12\}$ را اختیار کند سپس با استفاده از تابع احتمال می‌توان احتمال هر نقطه مورد نظر را به دست آورد. مثلاً: $P(X=3)=P(\{(1,2),(2,1)\})=\frac{2}{36}$

بنابراین با محاسبه همه احتمالات مربوط به مقادیر X تابع احتمال به صورت زیر می‌باشد.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)=P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ب ـ $P(X\le 5)=f_X(1)+f_X(2)+f_X(3)+f_X(4)+f_X(5)=\frac{10}{36}$

ج ـ $P(7\le X\le 9)=f_X(7)+f_X(8)+f_X(9)=\frac{15}{36}$

مثال ۲: مقدار C کدام باشد که تابع زیر یک تابع احتمال شود.

$$P(X=x)=C.(\frac{1}{2})^x \qquad x=0,1,2,...$$

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۲» طبق تعریف تابع احتمال باید جمع احتمالها به ازای نقاط مختلف برابر با ۱ باشد.

$$\sum_{x=0}^{\infty}P(X=x)=1 \Rightarrow c.(\frac{1}{2})^0+c.(\frac{1}{2})^1+\cdots=1 \Rightarrow c\left[1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+...\right]=1 \Rightarrow c.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1 \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

مثال ۳: مقدار K کدام باشد که تابع $\begin{cases}P(X=x)=\frac{K\lambda^i}{i!}\\ i=0,1,2,...\end{cases}$ **یک تابع احتمال شود؟**

۱) $e^{-\lambda}$ ۲) e^{λ} ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» طبق تعریف تابع احتمال:

$$\sum_i P(X=x)=1 \Rightarrow K\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}=1 \Rightarrow K.e^{\lambda}=1 \Rightarrow K=e^{-\lambda}$$

توجه: $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}=e^{\lambda}$

مثال ۴: اگر یک دنباله عناصر متمایز $\{a_0,b_0,a_1,b_1,...,a_n,b_n,...\}$ **فضای نمونه‌ای یک متغیر تصادفی را با تابع احتمال زیر تشکیل دهند آنگاه:** $P(a_n)=P(b_n)=\frac{K}{(n+2)(n+3)}$

۱) $k=1$ ۲) $k=2$ ۳) $k=\frac{1}{2}$ ۴) هیچ k ای با شرایط فوق وجود ندارد.

پاسخ: گزینه «۱»

$$\sum_{n=0}^{\infty}(P(a_n)+P(b_n))=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2k}{(n+2)(n+3)}=1 \Rightarrow 2K\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})=1 \Rightarrow 2K.\frac{1}{2}=1 \Rightarrow k=1$$

مثال ۵: شخصی می‌خواهد به دوست خود تلفن کند ولی او در اولین رقم سمت چپ این شماره مشکوک است و دقیقاً نمی‌داند در بین چهار رقم ۵ و ۶ و ۷ و ۸ کدامیک اولین رقم سمت چپ این شماره است. او این ارقام را یکی پس از دیگری امتحان می‌کند تا موفق شود. اگر X تعداد دفعاتی باشد که برای تلفن زدن (تا موفقیت) امتحان شده‌اند تابع (قانون) احتمال X به صورت زیر خواهد بود:

۱) $P(X=x)=\binom{4}{x}(\frac{1}{4})^{4-x} \quad x=1,2,3,4$ ۲) $P(X=x)=(\frac{3}{4})^{x-1}(\frac{1}{4}) \quad x=1,2,3,4$

۳) $P(X=x)=\frac{1}{4} \quad x=1,2,3,4$ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» واضح است که X مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار می‌کند. احتمال اینکه $X=1$ باشد یعنی این شخص در دفعه اول موفق شود که این احتمال برابر با $\frac{1}{4}$ است و احتمال $X=2$ به معنای آن است که او دفعه اول موفق نشده و دفعه دوم موفق شود که برابر با $\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$ است و به همین ترتیب . . . .

$$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=4)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$$

مثال ۶: اگر یک تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد:

$$P(n)=A\binom{n+1}{n}.(\frac{2}{3})^2.(\frac{1}{3})^n \qquad n=0,1,2,3,...$$

آنگاه مقدار A کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 3

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا تابع احتمال را ساده می‌کنیم:

$$P(n)=A.\frac{(n+1)!}{n!.1!}.\frac{4}{9}.(\frac{1}{3})^n=\frac{4}{9}A(n+1).(\frac{1}{3})^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}P(n)=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{4}{9}A\sum_{n=0}^{\infty}(n+1).(\frac{1}{3})^n=1\\ \sum_{n=0}^{\infty}a^{n+1}=\frac{a}{1-a} \Rightarrow (\frac{a}{1-a})'=\frac{1}{(1-a)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a^n\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}A.\frac{1}{(\frac{2}{3})^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{9}\times A\times\frac{9}{4}=1 \Rightarrow A=1$$

تابع توزیع (تجمعی):

تعریف: اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد آنگاه تابع توزیع (تجمعی) X که با نماد $F_X(x)$ نمایش داده می‌شود، برای هر $x \in R$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f_x(t)$$

***مثال ۷:** اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد تابع توزیع آن را بدست آورید.*

x	0	1	3
$f_x(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

☑ **پاسخ:**

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{6} & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{6} & 1 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

خواص تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته:

۱ـ برای هر $x \in R$، $0 \le F(x) \le 1$.

۲ـ تابع توزیع یک تابع غیر نزولی است یعنی: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

۳ـ $F_X(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$; $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

۴ـ تابع توزیع همواره از سمت راست پیوسته است یعنی:

$$\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$$

۵ـ شکل تابع توزیع متغیر گسسته به صورت پله‌ای است.

۶ـ از تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته می‌توان تابع احتمال آن را به دست آورد.

$$f_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

که در اینجا $F(x^-)$ حد سمت چپ تابع توزیع در نقطه x است.

> **توجه : هر نوع احتمالی را می‌توان با استفاده از تابع توزیع از روابط زیر محاسبه کرد:**
>
> ۱ـ $P(a < x \le b) = F_x(b) - F_x(a)$
>
> ۲ـ $P(a < x < b) = F_x(b^-) - F_x(a)$
>
> ۳ـ $P(a \le x < b) = F_x(b^-) - F_x(a^-)$
>
> ۴ـ $P(a \le x \le b) = F_x(b) - F_x(a^-)$
>
> ۵ـ $P(x > a) = 1 - F_x(a)$
>
> ۶ـ $P(x = b) = F_x(b) - F_x(b^-)$

***مثال ۸:** تابع توزیع متغیر تصادفی X عبارت است از:*

در این صورت مقدار احتمالات $P(X \le 3)$ و $P(X = 1)$ و $P(X > \frac{1}{2})$ و $P(2 < X \le 4)$ را بدست آورید.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

☑ **پاسخ:** با توجه به رابطه گفته شده می‌توانیم این مقادیر را به صورت روبرو محاسبه کنیم.

$$P(X \le 3) = F_X(3) = 1$$

$$P(X = 1) = F_X(1) - F_X(1^-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X \le \frac{1}{2}) = 1 - F_X(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(2 < X \le 4) = F_X(4) - F_X(2) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

متغیرهای تصادفی پیوسته (توزیعهای پیوسته)

تعریف: تابع $f_X(x)$ را یک تابع چگالی احتمال برای متغیر تصادفی X می‌نامیم هر گاه:

۱ـ به ازای هر $x \in R$، $f_X(x) \ge 0$

۲ـ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

۳ـ $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$

***مثال ۹:** سیستمی شامل یک واحد اصلی به اضافه یک پشتیبان است که می‌تواند برای مدت زمان تصادفی X کار کند. اگر تابع چگالی X (بر حسب ماه) به صورت زیر باشد:*

$$f_X(x) = \begin{cases} cxe^{\frac{-x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

احتمال اینکه سیستم حداقل ۵ ماه کار کند چقدر است؟

۱) $e^{-\frac{5}{2}}$ ۲) $3/5e^{-\frac{5}{2}}$ ۳) $2e^{-\frac{5}{2}}$ ۴) e^{-2}

پاسخ: گزینه «۲» انتگرال روبرو یک انتگرال جزء به جزء است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^\infty cxe^{-\frac{x}{2}}dx=1 \Rightarrow \begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ e^{-\frac{x}{2}}dx=dv \Rightarrow V=-2e^{-\frac{x}{2}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow c\left[uv-\int Vdu\right]=c\times\left[(-2xe^{-\frac{x}{2}})\Big|_0^\infty-\int_0^\infty -2e^{-\frac{x}{2}}dx\right]=c\times\left[-2xe^{-\frac{x}{2}}-4e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^\infty=1\Rightarrow c=\frac{1}{4}$$

$$P(X\ge 5)=\int_5^\infty f_X(x)dx=\int_5^\infty \frac{1}{4}x.e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{4}\left[-e^{-\frac{x}{2}}(2x+4)\right]_5^{+\infty}=3/5e^{-\frac{5}{2}}$$

مثال ۱۰: *اگر $x\ge 1$ و $f(x)=\frac{1}{x^2}$ تابع چگالی احتمال باشد، احتمال پیش آمد $A=\{[x]=2\}\cup\{[x]=3\}$ کدام است؟*

۱) $P(A)=\frac{11}{30}$ ۲) $P(A)=\frac{1}{6}$ ۳) $P(A)=\frac{1}{5}$ ۴) $P(A)=\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۴»

$$\begin{array}{l}2\le x<3\Rightarrow[x]=2\\3\le x<4\Rightarrow[x]=3\end{array}\Rightarrow A=\{x,2\le x<4\}\Rightarrow P(A)=\int_2^4\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_2^4=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

مثال ۱۱: *اگر تابع چگالی X به شکل $\begin{cases}f_X(x)=ax+\frac{1}{2}\\-1\le x\le 1\end{cases}$ باشد حدود a برابر است با:*

۱) $-\infty<a<\infty$ ۲) $-1\le a\le 1$ ۳) $a\ge 1$ ۴) $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه «۴» طبق خاصیت اول تابع چگالی احتمال:

$$\int_{-1}^1 f_X(x)dx=1\Rightarrow\int_{-1}^1(ax+\frac{1}{2})dx=a.\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^1+\frac{1}{2}x\Big|_{-1}^1=1$$

از طرفی $f_X(x)\ge 0$ برای این منظور نقاط ابتدا و انتهای بازه x را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{l}x=1\Rightarrow a+\frac{1}{2}\ge 0\Rightarrow a\ge-\frac{1}{2}\\x=-1\Rightarrow -a+\frac{1}{2}\ge 0\Rightarrow a\le\frac{1}{2}\end{array}\Rightarrow-\frac{1}{2}\le a\le\frac{1}{2}$$

مثال ۱۲: *اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد مقدار C کدام است؟*

$$f(x)=\begin{cases}c+x & -2\le x\le 0\\c-x & 0\le x\le 2\\0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه «۴» طبق خاصیت اول تابع چگالی احتمال:

$$\int_{-2}^0(c+x)dx+\int_0^2(c-x)dx=1\Rightarrow cx+\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^0+cx-\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2c-2+2c-2=1\Rightarrow c=\frac{5}{4}$$

مثال ۱۳: *متغیر تصادفی X دارای چگالی احتمال زیر است:*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}-ax & 0<x<2\\0 & \text{otherpoints}\end{cases}$$

احتمال اینکه X در فاصله (۲و۱) باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{5}{16}$

پاسخ: گزینه «۴»

طبق خاصیت تابع چگالی احتمال: $\int_0^2(\frac{1}{2}-ax)dx=1\Rightarrow(\frac{1}{2}x-\frac{ax^2}{2})\Big|_0^2=1\Rightarrow a=\frac{1}{8}$

$$\Rightarrow P(1<X<2)=\int_1^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}x^2\Big|_1^2=\frac{5}{16}$$

مثال ۱۴: *یک ایستگاه پمپ بنزین، دو هفته یکبار بنزین دریافت می‌کند. اگر حجم فروش هفتگی بر حسب هزار گالن یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر باشد:*

$$f_X(x)=\begin{cases}5(1-x)^4 & 0<x<1\\0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

حجم مخزن پمپ بنزین چقدر باشد، تا احتمال تمام شدن بنزین در یک هفته معین ۰/۰۱ گردد؟

۱) $(0/01)^5$ ۲) $(0/01)^{\frac{1}{5}}$ ۳) $1-(0/01)^{\frac{1}{5}}$ ۴) $1-(0/01)^5$

پاسخ: گزینه «۳» بدان معنا است که حجم فروش هفتگی (X) از حجم مخزن (V) بیشتر باشد و احتمال آن برابر با ۰/۰۱ شود.

$$P(X>v)=0/01\Rightarrow\int_v^{+\infty}f(x)dx=\int_v^1 5(1-x)^4dx=-(1-x)^5\Big|_v^1=0/01\Rightarrow(1-v)^5=0/01$$

$$\Rightarrow v=1-(0/01)^{\frac{1}{5}}$$

تابع توزیع (تجمعی) متغیر تصادفی پیوسته:

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد، تابع توزیع X که با $F_X(x)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

مثال ۱۵: ***فرض کنید تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت $f_X(x)=e^{-x}$ و $x\ge 0$ باشد. تابع توزیع متغیر X را بدست آورید.***

پاسخ: $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=\int_0^x e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^x=-e^{-x}+1=1-e^{-x} \Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

مثال ۱۶: ***متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال (PDF) $f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ است. تابع توزیع (C.D.F) آن عبارت است از:***

۱) $F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x\le 0\\ 1-\frac{1}{4}e^{-x} & x>0\end{cases}$

۲) $F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\ge 0\end{cases}$

۳) $F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{x} & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x>0\end{cases}$

۴) $F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{x} & x\le 0\\ 1-\frac{2}{3}e^{-x} & x\ge 0\end{cases}$

پاسخ: گزینه «۲»

$x<0 \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$

$x\ge 0 \Rightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_0^x\frac{1}{2}e^{-t}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x}$

مثال ۱۷: ***اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد، تابع توزیع X کدام است؟***

$f_X(x)=\begin{cases}x & 0<x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۱) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1\\ 2x-\frac{1}{2}x^2 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

۲) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1\\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

۳) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۲»

اگر $x<0 \Rightarrow F_X(x)=0$

اگر $0\le x<1 \Rightarrow F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}t^2\Big|_0^x=\frac{1}{2}x^2$

اگر $1\le x<2 \Rightarrow F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)\,dt=\int_0^1 t\,dt+\int_1^x(2-t)\,dt=\frac{1}{2}+\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_1^x=2x-\frac{1}{2}x^2-1$

نکته ۱: برای بدست آوردن تابع چگالی احتمال با استفاده از تابع توزیع با توجه به قضیه اساسی حساب از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد.

$F'(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=f_X(x)$ (در نقاطی که تابع توزیع مشتق‌پذیر باشد)

نکته ۲: در بعضی از توابع توزیع متغیرهای تصادفی پیوسته ممکن است یک یا چند نقطه انفصال وجود داشته باشد که برای بدست آوردن تابع احتمال در این نقاط دیگر نمی‌توانیم از تابع توزیع مشتق‌گیری کنیم و باید مطابق با خواص متغیر تصادفی گسسته عمل کنیم چنین متغیرهای تصادفی را متغیرهای تصادفی مختلط (mixture) می‌نامند.

مثال ۱۸: ***اگر $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{32} & 0\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$ باشد تابع چگالی احتمال متغیر X را بدست آورید.***

پاسخ: همانطور که مشخص است این تابع در نقطه $x=4$ انفصال دارد لذا نمی‌توان در این نقطه از تابع توزیع مشتق گرفت.

$0\le x<4 \Rightarrow f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\frac{x}{16}$

$X=4 \Rightarrow P(X=4)=F_X(4)-F_X(4^-)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{16} & 0\le x<4\\ \frac{1}{2} & x=4\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

مثال ۱۹: ***تابع توزیع (تجمعی) متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده است. مقدار $P(X=2)$ کدام است؟***

$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{8} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

۱) متغیر تصادفی X یک متغیر پیوسته است پس $P(X=2)=0$ است.

۲) ۱

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۳» در نقطه $x=2$ انفصال داریم. بنابراین:

$P(X=2)=F_X(2)-F_X(2^-)=1-\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

نکته ۳: $F_X(m)=\frac{1}{2}$ (m میانه است)

مثال ۲۰: ***متغیر تصادفی X دارای توزیع رایلی می‌باشد. یعنی:*** $f_X(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad x\ge 0$

مقدار میانه برابر است با:

۱) σ ۲) $\sigma\sqrt{\ln 2}$ ۳) $\sigma\sqrt{2\ln 2}$ ۴) $\sigma\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با استفاده از نکته (۳) داریم: $P(X \le m) = F_X(m) = \frac{۱}{۲}$

$$\Rightarrow \int_۰^m \frac{x}{\sigma^۲} e^{-\frac{x^۲}{۲\sigma^۲}} dx = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -e^{-\frac{x^۲}{۲\sigma^۲}}\Big|_۰^m = ۱ - e^{-\frac{m^۲}{۲\sigma^۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{-m^۲}{۲\sigma^۲} = \ln\frac{۱}{۲} = -\ln ۲ \Rightarrow m = \sigma\sqrt{۲\ln ۲}$$

توزیع احتمالات دو متغیره

در بخش قبل به بحث بر روی متغیرهای تصادفی یک بعدی پرداختیم در اینجا متغیرهای تصادفی دوبعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند توزیع احتمال همزمان آنها را به صورت $f_{X,Y}(x,y)$ نشان می‌دهیم و معمولاً آن را توزیع احتمال توأم X و Y می‌گویند.

توزیع احتمالات متغیرهای تصادفی گسسته

تعریف: تابع $f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$ را یک تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته گویند هرگاه:

الف ـ برای هر x و y داشته باشیم $f_{X,Y}(x,y) \ge ۰$ ب ـ $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) = ۱$

برای محاسبه احتمال قرار گرفتن (x,y) در یک ناحیه A در صفحه xy به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$P((X,Y) \in A) = \sum\sum_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)$$

✍ **مثال ۲۱:** *در ظرفی ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. دوبار متوالی مهره‌ای از ظرف به تصادف خارج می‌کنیم و پس از یادداشت رنگ آن، مهره را به ظرف بر می‌گردانیم. اگر X و Y به صورت زیر تعریف شوند تابع احتمال توأم (X,Y) را بدست آورید.*

$$\begin{cases} X = ۰ & \text{اگر مهره در استخراج اول سیاه باشد} \\ X = ۱ & \text{اگر مهره در استخراج اول سفید باشد} \end{cases}$$
$$\begin{cases} Y = ۰ & \text{اگر مهره در استخراج دوم سیاه باشد} \\ Y = ۱ & \text{اگر مهره در استخراج دوم سفید باشد} \end{cases}$$

☑ **پاسخ:** توجه کنید که $S_x = S_y = \{۰,۱\}$

$$P(X=۰,Y=۱) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۱}\binom{۸}{۱}} = \frac{۱۵}{۶۴} \quad ; \quad P(X=۰,Y=۰) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۱}\binom{۸}{۱}} = \frac{۲۵}{۶۴}$$

$$P(X=۱,Y=۱) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۱}\binom{۸}{۱}} = \frac{۹}{۶۴} \quad ; \quad P(X=۱,Y=۰) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۱}\binom{۸}{۱}} = \frac{۱۵}{۶۴}$$

بنابراین جدول توزیع احتمالات (X, Y) به صورت زیر بدست می‌آید.

Y=y \ X=x	۰	۱
۰	$\frac{۲۵}{۶۴}$	$\frac{۵۱}{۶۴}$
۱	$\frac{۱۵}{۶۴}$	$\frac{۹}{۶۴}$

✍ **مثال ۲۲:** *مقدار K کدام باشد تا تابع $f(x,y) = \frac{K}{x+y}$ ، $x = ۰,۱,۲$ ، $y = ۱,۲$ یک تابع احتمال توأم برای متغیر تصادفی توأم (X,Y) باشد.*

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۹}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\sum_x\sum_y f(x,y) = ۱ \Rightarrow \frac{K}{۱} + \frac{K}{۲} + \frac{K}{۳} + \frac{K}{۲} + \frac{K}{۳} + \frac{K}{۴} = ۱ \Rightarrow ۲K + \frac{۲K}{۳} + \frac{K}{۴} = ۱ \Rightarrow K = \frac{۱۲}{۳۵}$$

✍ **مثال ۲۳:** *مقدار ثابت C کدام است تا تابع دو متغیره زیر یک تابع احتمال توأم باشد:*

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} C(\frac{۱}{۲})^{۲x+y} & y = x, x+۱, \ldots \\ & x = ۱,۲,\ldots \\ ۰ & o.w \end{cases}$$

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\sum_x\sum_y f(x,y) = ۱ \Rightarrow \sum_{x=۱}^{\infty}\sum_{y=x}^{\infty} c(\tfrac{۱}{۲})^{۲x}.(\tfrac{۱}{۲})^y = ۱ \Rightarrow C\sum_{x=۱}^{\infty}(\tfrac{۱}{۲})^{۲x}[\sum_{y=x}^{\infty}(\tfrac{۱}{۲})^y] = ۱$$

$$\Rightarrow C\sum_{x=۱}^{\infty}(\tfrac{۱}{۲})^{۲x}.\frac{(\frac{۱}{۲})^x}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۱ \Rightarrow ۲C.\sum_{x=۱}^{\infty}(\tfrac{۱}{۲})^{۳x} = ۱ \Rightarrow ۲C.\frac{\frac{۱}{۸}}{۱-\frac{۱}{۸}} = ۱ \Rightarrow C = \frac{۷}{۲}$$

توزیع های احتمال حاشیه‌ای یا کناری

زوج متغیرهای تصادفی گسسته (X , Y) را در نظر می‌گیریم. واضح است که متغیر تصادفی X بدون در نظر گرفتن مقادیر Y و متغیر تصادفی Y بدون در نظر گرفتن X دارای توزیع‌های احتمال می‌باشد که به آنها توزیع‌های حاشیه‌ای می گویند. آنها را به ترتیب با $P_X(x)$ و $P_Y(y)$ نشان می‌دهیم.

$$P_X(x) = f_X(x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$
$$P_Y(y) = f_Y(y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

✍ **مثال ۲۴:** *در جدول توزیع احتمال توأم (X,Y) که به صورت زیر آمده است توزیع حاشیه‌ای X را بیابید.*

Y=y \ X=x	۱	۲	۳
۰	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$
۲	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ: طبق تعریف گفته شده:

$S_X=\{۱,۲,۳\}$, $P(x)=\sum_y P(X=x\,,\,Y=y)$

$$P_X(۱)=P(X=۱)[(X=۱\,,\,Y=۰)\cup(X=۱\,,\,Y=۲)]=P(X=۱\,,\,Y=۰)+P(X=۱\,,\,Y=۲)=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۳}$$

$$P_X(۲)=P(X=۲)=P[(X=۲,Y=۰)\cup(X=۲,Y=۲)]=P(X=۲,Y=۰)+P(X=۲,Y=۲)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$P_X(۳)=P(X=۳)=P[(X=۳,Y=۰)\cup(X=۳,Y=۲)]=P(X=۳,Y=۰)+P(X=۳,Y=۲)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

بنابراین:

$X=x$	۱	۲	۳
$P(X=x)$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۱۲}$

با توضیحات بالا به این نتیجه می‌رسیم که اگر مجموع احتمال‌های ستون‌های جدول توزیع احتمال توأم (X,Y) را در ذیل هر ستون بدست آوریم، این احتمال‌ها توزیع حاشیه‌ای X را مشخص می‌کند و اگر مجموع احتمال‌های سطرهای جدول را بدست آوریم احتمالهای حاشیه‌ای y بدست می‌آید.

توزیع شرطی متغیر تصادفی توأم گسسته.

اگر $X=x$ را پیشامد A و $Y=y$ را پیشامد B بگیریم طبق قانون احتمال شرطی $(P(A|B))$ می‌توانیم احتمال پیشامد $(X=x\,|\,Y=y)$ را به صورت:

$$P(X=x\,|\,Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}\quad,\quad P(Y=y)\neq ۰$$

تعریف کنیم.

به صورت مشابه توزیع احتمال شرطی متغیر $Y=y$ به شرط $X=x$ به صورت زیر است:

$$P(Y=y\,|\,X=x)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}\quad,\quad P(X=x)\neq ۰$$

مثال ۲۵: *جدول توأم (X,Y) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.*

$Y=y$ \ $X=x$	۱	۲	۳
۰	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$
۲	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$

توزیع احتمال $P(X\,|\,Y=۲)$ را بدست آورید.

پاسخ : طبق تعریف احتمال شرطی در بالا:

$$P_X(۱|۲)=\frac{P(۱,۲)}{P_y(۲)}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۳}{۵}$$

$$P_X(۲|۲)=\frac{P(۲,۲)}{P_y(۲)}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۱}{۵}$$

$$P_X(۳|۲)=\frac{P(۳,۲)}{P_y(۲)}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۱}{۵}$$

$X=x$	۱	۲	۳
$P_X(x\,|\,۲)$	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$

نکته ۴:

$$P(a<X<b\,|\,y=c)=\sum_{a<x<b} f_{X|Y}(x\,|\,c)$$

مثال ۲۶: *در مثال قبل $P(X\le ۲\,|\,y=۲)$ کدام است؟*

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه «۴» از جدول توزیع احتمال شرطی بالا می‌توانیم طبق نکته ۴ این مقدار را بدست آوریم.

$$P(X\le ۲\,|\,y=۲)=\sum_{x=۱}^{۲} f_{X|Y}(x\,|\,۲)=\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

استقلال متغیرها.

اگر $P(x,y)$ توزیع احتمال توأم متغیر تصادفی گسسته (X,Y) باشد و $P_X(x)$ و $P_Y(y)$ به ترتیب توزیع‌های حاشیه‌ای x و y به ازای x و y باشند، دو متغیر x و y را مستقل گویند اگر و تنها اگر به ازای تمام مقادیر (X,Y) داشته باشیم.

$$P(x,y)=P_X(x).P_Y(y)$$

مثال ۲۷: *توزیع احتمال توأم (X,Y) را به صورت زیر در نظر بگیرید آیا (X,Y) از هم مستقل هستند؟*

$Y=y$ \ $X=x$	۱	۲
۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$
۱	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$

۱) بله ۲) بستگی به مقادیر X و Y دارد. ۳) خیر ۴) نمی‌توان قضاوت کرد.

پاسخ: ملاحظه می‌شود که به ازای تمام مقادیر (X,Y) برابر $P(x,y)=\frac{۱}{۴}=P_X(x).P_Y(y)=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$ برقرار است.

بنابراین X و Y مستقل از هم هستند.

$Y=y$ \ $X=x$	۱	۲	$P_Y(y)$
۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$
۱	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$
$P_X(x)$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	

توزیع احتمالات دو متغیر تصادفی پیوسته.

تابع $f_{X,Y}(x,y)$ را یک تابع احتمال توأم برای متغیرهای تصادفی پیوسته گویند هرگاه:

۱- برای هر x و y داشته باشیم $f_{X,Y}(x,y)\ge ۰$

۲- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=۱$

مثال ۲۸: *تابع چگالی توأم (X,Y) به صورت زیر است مقدار a کدام است؟*

$$f(x,y)=\begin{cases} ax^2y & 0<y<1 \ ,\ 0<x<1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\int_0^1\int_0^1 ax^2y\,dxdy=1 \Rightarrow a\int_0^1 dy\int_0^1 x^2y\,dx=1 \Rightarrow a\int_0^1(\frac{1}{3}x^3y)_0^1dy=1 \Rightarrow a\int_0^1\frac{y}{3}dy=1$$

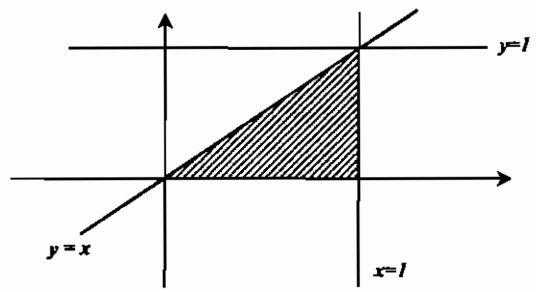
$$a.(\frac{1}{6}y^2)_0^1=1\Rightarrow\frac{a}{6}=1\Rightarrow a=6$$

مثال ۲۹: *اگر تابع توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر باشد مقدار C کدام است؟*

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy^2 & 0\le x\le y\le 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{100}$ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»



$$\int_0^1\int_x^1 cxy^2\,dydx=1 \Rightarrow \int_0^1(\int_x^1 y^2dy)\,cx\,dx=1$$

$$\Rightarrow \int_0^1(\frac{1}{3}y^3)_x^1\,cx\,dx=1 \Rightarrow c\int_0^1(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x^3)x\,dx=1$$

$$\Rightarrow \frac{c}{3}\int_0^1(1-x^3)x\,dx=\frac{c}{3}(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5)_0^1=1 \Rightarrow c=10$$

توجه: برای محاسبه احتمال قرار گرفتن (x,y) در یک ناحیه A در صفحه xy به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$P((X,Y)\in A)=\iint_A f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

مثال ۳۰: *در تابع توأم* $f(x,y)=\begin{cases} 6x^2y & 0<x<1 \ ,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ ***مقدار*** $P(0<X<\frac{3}{4},\frac{1}{3}<Y<1)$ ***را بدست آورید.***

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{4}{8}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{1}{7}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$P(0<X<\frac{3}{4},\frac{1}{3}<Y<1)=\int_{\frac{1}{3}}^1dy\int_0^{\frac{3}{4}}6x^2y\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^1(2x^3y)_0^{\frac{3}{4}}dy=\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{27}{32}y\,dy=\frac{27}{64}y^2\Big|_{\frac{1}{3}}^1=\frac{27}{64}-\frac{3}{64}=\frac{3}{8}$$

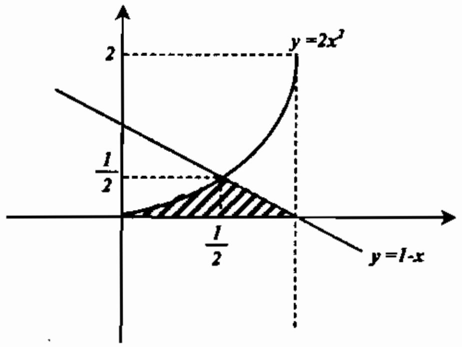
مثال ۳۱: *تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر مفروض است:*

$$f(x,y)=\begin{cases} 3xy & 0<y<2x^2 \ ,\ 0<x<1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

مقدار $P(X+Y\le 1)$ ***کدام است؟***

۱) $\frac{3}{128}$ ۲) $\frac{7}{128}$ ۳) $\frac{3}{64}$ ۴) $\frac{5}{64}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»



$$P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y}3xy\,dx\,dy=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}x^2y\Big|_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y}dy$$

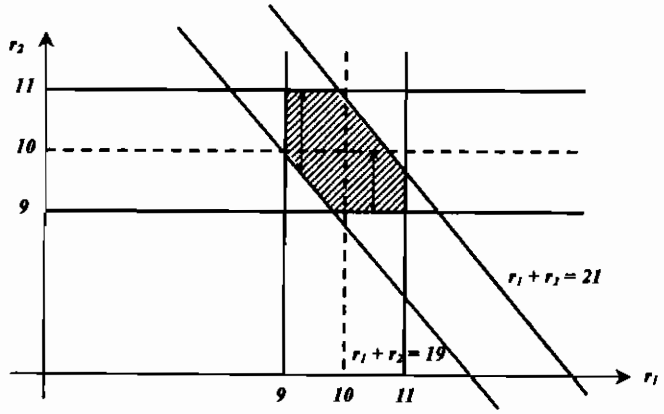
$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-y)^2-\frac{y}{2}\right)y\,dy=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(y^3-\frac{5y^2}{2}+y)dy$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{y^4}{4}-\frac{5y^3}{6}+y^2\right)_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(\frac{1}{64}-\frac{5}{48}+\frac{1}{4})=\frac{7}{128}$$

مثال ۳۲: *دو مقاومت R_1 و R_2 هر کدام یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال یکنواخت بین $9\,K\Omega$ و $11\,K\Omega$ می‌باشند. اگر R_1 و R_2 مستقل از هم باشند احتمال آنکه مقدار ترکیب سری آنها (Req) در فاصلهٔ $19\,K\Omega\le Req\le 21\,K\Omega$ باشد، چقدر است؟*

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»



راه حل اول:

$$\text{احتمال مورد نظر}=\frac{\text{مساحت هاشور خورده}}{\text{مساحت کل مربع}}=\frac{4-(1/2+1/2)}{4}=\frac{3}{4}$$

راه حل دوم: چون R_1 و R_2 مستقل هستند، لذا توزیع احتمال توأم آنها، برابر با حاصلضرب توزیع احتمال‌ها می‌باشد.

$$f(r_1,r_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(19\le R_1+R_2\le 21)=\frac{1}{4}\iint_{19\le R_1+R_2\le 21}dr_1dr_2=\frac{1}{4}(\int_9^{10}\int_{19-r_1}^{11}dr_2\,dr_1+\int_{10}^{11}\int_9^{21-r_1}dr_2\,dr_1)$$

$$=\frac{1}{4}(\int_9^{10}(11-19+r_1)dr_1+\int_{10}^{11}(21-r_1-9)dr_1)=\frac{1}{4}\left[(-8r_1+\frac{1}{2}r_1^2)\Big|_9^{10}+(12r_1-\frac{1}{2}r^2)\Big|_{10}^{11}\right]=\frac{1}{4}(3)=\frac{3}{4}$$

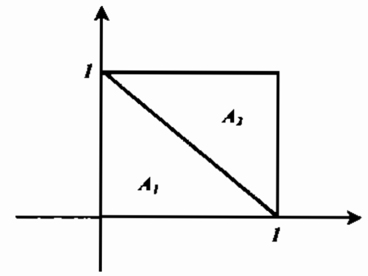
مثال ۳۳: تابع چگالی احتمال یک پیشامد به صورت زیر است:

$$f(x,y)=K|1-x-y| \qquad 0<x<1,\quad 0<y<1$$

که در آن K عدد ثابت مناسبی است. اگر $P(X<Y)=\alpha$ آنگاه:

۱) $\alpha=\frac{1}{2}\ ,\ K=3$ ۲) $\alpha=\frac{1}{2}\ ,\ K=6$ ۳) $\alpha=\frac{3}{4}\ ,\ K=3$ ۴) $\alpha=\frac{3}{4}\ ,\ K=\frac{3}{2}$

☑ **پاسخ :** گزینه «۱»



$$\iint_A K|1-x-y|\,dxdy=1$$

$$1-x-y=0\Rightarrow y=1-x$$

$$A_1: x+y<1\quad,\quad A_2: x+y>1$$

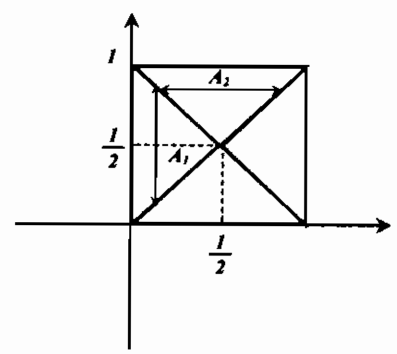
$$\Rightarrow \iint_{A_1}K(1-x-y)dxdy+\iint_{A_2}K(x+y-1)dxdy=1$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}K(1-x-y)\,dy\,dx+\int_0^1\int_{1-x}^1 K(x+y-1)dydx$$

$$=K.\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx+K\int_0^1\left[(x-1)y+\frac{1}{2}y^2\right]_{1-x}^1 dx$$

$$=K\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)^2dx+K\int_0^1(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-x)^2)\,dx=-\frac{K}{6}(1-x)^3\Big|_0^1+\frac{K}{6}x^3\Big|_0^1=\frac{K}{3}=1\Rightarrow K=3$$

قسمت دوم مسئله:



$$\alpha=P(X<Y)=3\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx+3\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{1-y}^y(x+y-1)dxdy$$

$$=3\int_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left[(1-x-y)^2\right]_x^{1-x}dx+3\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{2}\left[(x+y-1)^2\right]_{1-y}^y dy$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)^2dx+\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1(2y-1)^2dy=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

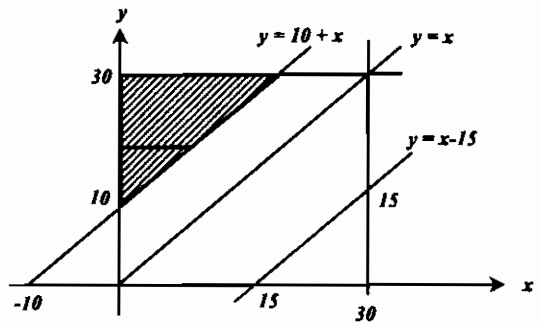
مثال ۳۴: دو قطار در فاصله زمانی ساعت دوازده و دوازده و نیم به ایستگاهی می‌رسند و زمان رسیدن آنها متغیرهای تصادفی مستقل از هم می‌باشند. قطار اول ۱۰ دقیقه توقف و سپس حرکت می‌کند و قطار دوم ۱۵ دقیقه توقف و سپس حرکت می‌کند. احتمال آن‌که این دو قطار یکدیگر را در یک ایستگاه ببینند چیست؟

۱) ۰/۶۵۳ ۲) ۰/۶۲۸ ۳) ۰/۳۷۲ ۴) ۰/۳۴۷

☑ **پاسخ :** گزینه «۴»، دو متغیر تصادفی X و Y دارای توزیع یکنواخت $U(0,30)$ و مستقل می‌باشند بنابراین:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{900}\ ,\ 0<x<30\ ,\ 0<y<30\\ 0\ ,\quad \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

اگر قطار اول (X) قبل از قطار دوم (Y) به ایستگاه وارد شده، احتمال آنکه یکدیگر را ملاقات کنند برابر است با:



$$P(X<Y,Y-X<10)=\int_{10}^{30}\int_0^{y-10}\frac{1}{900}dx\,dy=\frac{1}{900}\int_{10}^{30}(y-10)\,dy=\frac{1}{900}(\frac{1}{2}y^2-10y)\Big|_{10}^{30}=\frac{2}{9}$$

اگر قطار دوم (Y) قبل از قطار اول به ایستگاه برسد:

$$P(Y<X,X-Y<15)=\int_{15}^{30}\int_0^{x-15}\frac{1}{900}dy\,dx=\frac{1}{900}\int_{15}^{30}(x-15)\,dx=\frac{1}{900}(\frac{1}{2}x^2-15x)\Big|_{15}^{30}$$

$$=\frac{1}{900}(450-450-\frac{225}{2}+225)=\frac{225}{1800}=\frac{1}{8}$$

جواب : $\frac{2}{9}+\frac{1}{8}=\frac{25}{72}=0/347$

توزیع‌های احتمال حاشیه‌ای (کناری)

اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال حاشیه‌های X و تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dx$$

مثال ۳۵: تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر داده شده است.

$$f(x,y)=\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2}) \qquad 0<x<1\quad,\quad 0<y<2$$

تابع چگالی کناری X را محاسبه کنید.

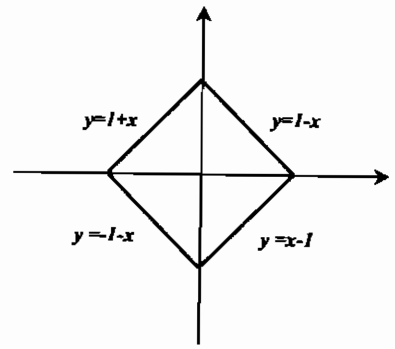
☑ **پاسخ:** طبق تعریف احتمال حاشیه‌ای داریم:

$$f_X(x)=\int_0^2\frac{6}{7}(x^2+\frac{xy}{2})\,dy=\frac{6}{7}(x^2y-\frac{xy^2}{4})\Big|_0^2=\frac{6}{7}(2x^2+x)\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}\frac{6}{7}(2x^2+x) & 0<x<1\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

مثال ۳۶: اگر متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم یکنواخت در ناحیه $\{(x,y):|x|+|y|<1\}$ باشد، تابع چگالی کناری X برابر است با:

۱) $\begin{cases}2-x & 0\le x\le 1\\ 2+2x & -1\le x\le 0\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}1+x & 0\le x\le 1\\ 1-x & -1\le x\le 0\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}-x & 0\le x\le 1\\ x & -1\le x\le 0\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}-x & 0\le x\le 1\\ x & -1\le x\le 0\end{cases}$

پاسخ: گزینه «۱» مساحت کل ناحیه برابر با ۲ است.



$$f(x,y)=\frac{1}{2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-1-x}^{1+x}\frac{1}{2}dy & -1\le x\le 0\\ \int_{x-1}^{1-x}\frac{1}{2}dy & 0\le x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+2x & -1\le x\le 0\\ 2-x & 0\le x\le 1\end{cases}$$

مثال ۳۷: *تابع چگالی توأم (X,Y) به صورت زیر است:*

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & x>0\ ,\ x+y<1\\ & y>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

تابع چگالی حاشیه‌ای Y کدام است؟

۱) $f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y) & 0<y<1\\ 0 & o.w\end{cases}$

۲) $f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0<y<1\\ 0 & o.w\end{cases}$

۳) $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & 0<y<1\\ 0 & o.w\end{cases}$

۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۱» اگر y را ثابت بگیریم مقادیر x از ۰ تا $x=1-y$ تغییر می‌کند.

$$f_Y(y)=\int_0^{1-y}2dx=(2x)\Big|_0^{1-y}=2(1-y)\ \Rightarrow\ f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y) & 0<y<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

نکته ۵: $f(x,y)=\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$ (اگر از تابع توزیع دو بار مشتق بگیریم تابع چگالی احتمال بدست می‌آید)

مثال ۳۸: *تابع توزیع توأم (X,Y) به صورت روبرو است:*

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x^2})(1-e^{-y}) & x>0\ ;\ y>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

تابع چگالی توأم (X,Y) را بدست آورید.

پاسخ: طبق نکته (۵) از تابع توزیع دو بار مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=2xe^{-x^2}(1-e^{-y})$$

$$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x.\partial y}=2xe^{-x^2-y}\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}2xe^{-x^2-y} & x>0\\ & y>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

نکته ۶: توزیع احتمال شرطی زوج پیوسته (x,y)

مانند متغیرهای تصادفی گسسته داریم:

$$f_{X|Y=y}(X|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X=x}(Y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

مثال ۳۹: *تابع چگالی توأم زیر را در نظر بگیرید:*

$$f(x,y)=\begin{cases}2 & x+y<1\\ & x>0\\ & y>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$f(y|x)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{1-x}$ ۲) $2(1-x)$ ۳) $\frac{1}{1-x}$ ۴) $1-x$

پاسخ: گزینه «۳» طبق نکته (۶) داریم:

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2}{\int_0^{1-x}2dy}=\frac{2}{2(1-x)}=\frac{1}{1-x}$$

نکته ۷: $P(a<X<b|y=c)=\int_a^b f_{X|Y}(x|c)dx$

مثال ۴۰: *فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند.*

$$f(x,y)=\begin{cases}3xy & 0<x<1\ ;\ 0<y<2x^2\\ 0 & o.w\end{cases}$$

مقدار $P(\frac{1}{2}<X<1|y=\frac{1}{3})$ را بدست آورید.

پاسخ: طبق نکته (۷) می‌توانیم احتمال داده شده را بدست آوریم:

$$I:P(\tfrac{1}{2}<X<1|y=\tfrac{1}{3})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f_{x|y}(x|\tfrac{1}{3})dx$$

از طرفی: $f_Y(y)=\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1}3xydx=\frac{3}{2}y(x^2)\Big|_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1}=\frac{3}{2}y(1-\frac{y}{2})$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{3xy}{\frac{3}{2}y(1-\frac{y}{2})}=\frac{4x}{2-y}$$

$$I\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{4x}{2-y}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{4x}{2-\frac{1}{3}}dx=\frac{6}{5}x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{9}{10}$$

استقلال دو متغیر تصادفی پیوسته

دو متغیر (X,Y) را مستقل از یکدیگر می‌گویند اگر و تنها اگر:

$$f(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$$

مثال ۴۱: *آیا دو متغیر (X,Y) با تابع چگالی توأم زیر مستقل هستند؟*

$$f(x,y)=\begin{cases}12xy(1-y) & 0<x<1\\ & 0<y<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

پاسخ:

$$f_X(x)=\int_0^1 12xy(1-y)dy=12x\int_0^1 y(1-y)dy$$

$$=12x\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)_0^1=2x \Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 12xy(1-y)dx=12y(1-y)\int_0^1 x\,dx=6y(1-y)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}6y(1-y) & 0<y<1\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$$

امید ریاضی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $P(X=x)$ یا چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی X یا میانگین X به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر X متغیری گسسته باشد. $$E(X)=\sum_x x.P(X=x)$$

اگر X متغیری پیوسته باشد. $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f_X(x)$$

نکته ۸: اگر $E(|X|)$ وجود نداشته باشد، آنگاه می‌گوییم $E(X)$ وجود ندارد.

مثال ۴۲: در یک جعبه شامل ۵ قطعه الکتریکی می‌دانیم که دو قطعه معیوب وجود دارد. اگر برای کشف قطعات معیوب آنها را یک به یک و به تصادف آزمایش کنیم امید ریاضی تعداد کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه «۳»، طبق تعریف امید ریاضی مقدار متغیر در احتمال مربوط به خودش ضرب می‌شود در اینجا منظور از $P(X=2)$ یعنی بعد از دو آزمایش به دو نقطه معیوب دستیابیم و به همین ترتیب . . .

$$E(X)=\sum x.P(X=x)=2\times P(X=2)+3\times P(X=3)+4\times P(X=4)+5\times P(X=5)$$

$$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=3)=\binom{2}{1}\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)$$

$$P(X=4)=\binom{3}{1}\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X=5)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\right)$$

$$E(X)=4$$

مثال ۴۳: متغیر تصادفی نامنفی با مقدار صحیح X را در نظر بگیرید. اگر برای هر $i\ge 1$ متغیر تصادفی X_i را چنین تعریف کنیم:

$$X_i=\begin{cases}1, & X\ge i\\ 0, & X\le i\end{cases}$$

آنگاه کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟

۱) $E[X]=\sum_{i=1}^{\infty} P\{X<i\}\,,\ X=\sum_{i=1}^{\infty} X_i$

۲) $E[X]=\sum_{i=1}^{\infty} P\{X\ge i\}\,,\ X=\sum_{i=1}^{\infty} X_i$

۳) $E[X]=\sum_{i=1}^{\infty} P\{X<i\}\,,\ X=\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2$

۴) $E[X^1]=\sum_{i=1}^{\infty} P\{X\ge i\}\,,\ X=\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2$

پاسخ: گزینه «۲»

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)=x_1p(x_1)+x_2p(x_2)+\cdots=1p(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X\ge i)=P(X\ge 1)+P(X\ge 2)+\cdots+P(X\ge n)+\cdots=P(X=1)+P(X=2)+P(x=3)+\cdots$$

$$+P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=3)+\cdots$$

توجه کنید که همواره داریم $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(X\ge i)$$

مثال ۴۴: جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۵ مهره آبی است، دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر مهره‌ها یک رنگ باشند آنگاه ۱/۱ ریال جایزه می‌گیریم و اگر از رنگ‌های مختلف بود ۱ ریال جریمه می‌شویم انتظار دارید که چه مقدار برنده یا جریمه شویم؟

۱) ۰/۰۶۶ ۲) ۰/۰۶۶− ۳) ۰/۰۵۷ ۴) ۰/۰۵۷−

پاسخ: گزینه «۲»، در اینجا متغیر تصادفی مقدار برنده شدن یا جریمه شدن است که در احتمال مربوط به خودش ضرب می‌شود.

$$E(X)=\sum x.P(X=x)=1/1\times\frac{2\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}+(-1)\times\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}=-0/066$$

به طور متوسط ۰/۰۶۶ ریال جریمه می‌شویم.

مثال ۴۵: تابع چگالی احتمال X به صورت زیر است:

$$f_X(x)=\begin{cases}a+bx^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

اگر $E(X)=\frac{3}{5}$ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

پاسخ: چون $f(x)$ تابع چگالی است:

$$\int_0^1 f(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^1 (a+bx^2)dx=1 \Rightarrow ax+\frac{bx^3}{3}\Big|_0^1=1 \Rightarrow a+\frac{b}{3}=1$$

از طرفی $E(X)=\frac{۳}{۵}$ است بنابراین طبق تعریف امید ریاضی:

$$E(X)=\int_{۰}^{۱} x.f(x)\,dx=\frac{۳}{۵}\int_{۰}^{۱}(ax+bx^{۳})\,dx=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \left.\frac{ax^{۲}}{۲}+\frac{bx^{۴}}{۴}\right|_{۰}^{۱}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{a}{۲}+\frac{b}{۴}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{۳}=۱ \\ \frac{a}{۲}+\frac{b}{۴}=\frac{۳}{۵} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{۳}{۵}\ ,\ b=\frac{۶}{۵}$$

مثال ۴۶: *طول عمر یک لامپ الکتریکی (برحسب ساعت) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است:*

$f(x)=x.e^{-x}$

متوسط طول عمر چنین لامپی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» از روش انتگرال جزء به جزء:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx=\int_{۰}^{\infty} x^{۲}e^{-x}dx=-x^{۲}.e^{-x}\Big|_{۰}^{\infty}-\int_{۰}^{\infty}-۲xe^{-x}dx$$

$$=\int_{۰}^{\infty}۲xe^{-x}dx=-۲xe^{-x}\Big|_{۰}^{\infty}-\int_{۰}^{\infty}-۲e^{-x}dx=۲\int_{۰}^{\infty}e^{-x}dx=-۲e^{-x}\Big|_{۰}^{\infty}=۲$$

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی گسسته و یک متغیر تصادفی پیوسته:

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $P(X=x)$ یا چگالی احتمال $f_X(x)$ باشد. امید ریاضی تابع $y=g(x)$ عبارت است از:

$E(g(X))=\sum_{x} g(x).P(X=x)$ اگر X گسسته باشد.

$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x).f_X(x)\,dx$ اگر X پیوسته باشد.

مثال ۴۷: *فرض کنید متغیر X دارای تابع احتمال زیر باشد. مقدار امید ریاضی $Y=X^{۲}-۱$ کدام است؟*

x	-۲	-۱	۰	۱
$P(X=x)$	۰/۲	۰/۱	۰/۵	۰/۲

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ: گزینه «۱»

$$E(X^{۲}-۱)=\sum_{x=-۲}^{۱}(x^{۲}-۱)P(X=x)=(-۲^{۲}-۱)(۰/۲)+(-۱^{۲}-۱)(۰/۱)+(۰^{۲}-۱)(۰/۵)+(۱^{۲}-۱)(۰/۲)=۰/۱$$

مثال ۴۸: *فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر باشد. مقدار امید ریاضی تابع $Y=۵X-۴$ کدام است؟*

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۱۶}\sqrt{x} & ۰<x<۴ \\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۳»

$$E(۵X-۴)=\int_{۰}^{۴}(۵x-۴)\frac{۳}{۱۶}\sqrt{x}\,dx=\frac{۳}{۱۶}\left[۲\sqrt{x^{۵}}-\frac{۸}{۳}\sqrt{x^{۳}}\right]_{۰}^{۴}=\frac{۳}{۱۶}\left[۶۴-\frac{۶۴}{۳}\right]=۸$$

تعریف: فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ باشد. امید ریاضی تابع $g(x,y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$E(g(X,Y))=\sum_{x}\sum_{y} g(X,Y)P(X=x,Y=y)$ X و Y گسسته باشند.

$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y)f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$ X و Y پیوسته باشند.

مثال ۴۹: *فرض کنید X و Y دارای جدول توزیع احتمال زیر باشند. مقدار امید ریاضی تابع $g(x,y)=XY$ کدام است؟*

Y \ X	۱	۲
۱	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$
۲	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۲}$

۱) $\frac{۲۵}{۴}$ ۲) $\frac{۲۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» طبق تعریف بالا:

$$E(XY)=\sum_{x=۱}^{۲}\sum_{y=۱}^{۲}xyP(X=x,Y=y)=۱\times۱P(X=۱,Y=۱)+۱\times۲P(X=۱,Y=۲)$$

$$+۲\times۱P(X=۲,Y=۱)+۲\times۲P(X=۲,Y=۲)=\frac{۱}{۸}+۲\times\frac{۱}{۸}+۲\times\frac{۱}{۴}+۴\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}+\frac{۲}{۸}+\frac{۲}{۴}+\frac{۴}{۲}=\frac{۲۳}{۸}$$

مثال ۵۰: *فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند. مقدار امید ریاضی تابع $Z=XY$ کدام است؟*

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{۲}{x}e^{-۲x} & ۰<x<\infty, ۰<y\le x \\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه «۳»

$$E(XY)=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{x}x.y.\frac{۲}{x}e^{-۲x}\,dy\,dx=\int_{۰}^{\infty}x^{۲}e^{-۲x}dx=\frac{-x^{۲}}{۲}e^{-۲x}\Big|_{۰}^{\infty}+\int_{۰}^{\infty}xe^{-۲x}\,dx=۰+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

قوانین امید ریاضی

در زیر تعدادی قضیه و نتیجه را بدون اثبات بیان می‌کنیم که به کار بردن آنها را در حل مسائل توصیه می‌کنیم.

۱) (a و b اعداد ثابت) امید ریاضی یک عملگر خطی است. $E[a.g(X)+b.h(X)]=aE(g(X))+bE(h(X))$

۲) (a و b اعداد ثابت) $E(aX+b)=aE(X)+b$

۳) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

۴) اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل (غیر همبسته) باشند $E(XY)=E(X).E(Y)$

۵) اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$، n متغیر تصادفی و $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد ثابتی باشند آنگاه:

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i)$$

و اگر این n متغیر تصادفی از یکدیگر مستقل (غیر همبسته) باشند:

$$E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

امیدهای ریاضی خاص

- اگر ما $g(X)=X^r$ معرفی کنیم در اینصورت (r عددی صحیح نامنفی) امید ریاضی تابع $g(X)$ به r امین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X معروف است و آن را با نماد μ'_r نمایش می‌دهند. یعنی:

- گشتاور r ام حول مبدأ

$$\mu'_r = E(g(X)) = E(X^r)$$

توجه : $\mu'_0 = 1$ و $\mu'_1 = E(X) = \mu$ که همان میانگین X یا امید ریاضی X می‌باشد.

- اگر قرار دهیم $g(X)=(X-\mu)^r$ آنگاه امید ریاضی تابع $g(X)$ را گشتاور مرتبه r ام X حول میانگین یا گشتاور مرکزی X گویند. و آن را با نماد μ_r نمایش می‌دهند. یعنی:

گشتاور مرکزی مرتبه r ام X

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r]$$

توجه : گشتاور مرکزی مرتبه دوم X را واریانس می‌نامند و با نمادهای σ^2 و σ_X^2 یا $Var(X)$ نمایش می‌دهند.

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

مثال ۵۱ : *در جدول زیر مقدار واریانس کدام است؟*

x	۰	۱	۲	۳
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۹۶ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۳» طبق توجه گفته شده در بالا از رابطه واریانس که در بالا گفته شده استفاده می‌کنیم:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2P(X=x) = 0^2\times\frac{1}{2} + 1^2\times\frac{3}{10} + 4\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{1}{10} = 1/6$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} xP(X=x) = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{3}{10} + 2\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1/6 - (0/8)^2 = 0/96$$

مثال ۵۲ : *فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل از هم بوده و داشته باشیم:*

$$\begin{cases} E(X)=2 \\ V(X)=4 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} E(Y)=3 \\ V(Y)=6 \end{cases}$$

در اینصورت واریانس متغیر $Z=XY$ برابر است با:

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۷۲ ۴) ۸۴

پاسخ: گزینه «۴»

$$V(Z) = E(Z^2) - E^2(Z)$$

$$E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y) = 2\times 3 = 6$$ (X و Y مستقل هستند)

$$E(Z^2) = E(X^2Y^2) = E(X^2)E(Y^2) = (V(X)+E^2(X))(V(Y)+E^2(Y)) = (4+4)(6+9) = 120$$

$$V(Z) = 120 - 36 = 84$$

- اگر قرار دهیم $g(X,Y)=(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ آنگاه امید ریاضی $g(X,Y)$ راکوواریانس X و Y می‌نامند و آن را با نماد $CoV(X,Y)$ یا σ_{XY} نمایش می‌دهند.

$$CoV(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

توجه : اگر X و Y مستقل باشند $CoV(X,Y)=0$. ولی عکس این مطلب درست نیست. یعنی اگر $CoV(X,Y)=0$ باشد دلیلی بر استقلال X و Y وجود ندارد.

مثال ۵۳: *در جدول توزیع احتمال زیر مقدار $CoV(X,Y)$ کدام است؟*

Y \ X	-۱	۱
-۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$E(XY) = \sum_{x=-1}^{1}\sum_{y=-1}^{1} xyP(X=x,Y=y) = -1\times-1\times\frac{1}{4} + -1\times1\times\frac{1}{4} + 1\times-1\times\frac{1}{4} + 1\times1\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$E(X) = \sum\sum x\, P(X=x,Y=y) = \sum_{x=-1}^{1}\sum_{y=-1}^{1} x\,P(X=x,Y=y) = -1\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 0$$

مثال ۵۴: فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}8xy & 0<x<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

مقدار $Cov(X,Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{4}{225}$ ۳) $\frac{32}{225}$ ۴) $\frac{32}{215}$

پاسخ: گزینه «۲» برای بدست آوردن $E(X)$ و $E(Y)$ ابتدا چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y را بدست می‌آوریم:

$$f_X(x)=\int_x^1 8xy\,dy=4xy^2\Big|_x^1=4x(1-x^2) \qquad 0<x<1$$

$$\Rightarrow E(X)=\int_0^1 4x^2(1-x^2)dx=\frac{4}{3}x^3-\frac{4}{5}x^5\Big|_0^1=\frac{4}{3}-\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

$$f_Y(y)=\int_0^y 8xy\,dx=4x^2y\Big|_0^y=4y^3 \qquad 0<y<1$$

$$E(Y)=\int_0^1 4y^4dy=\frac{4}{5}y^5\Big|_0^1=\frac{4}{5}$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^y 8x^2y^2\,dx\,dy=\int_0^1\frac{8}{3}y^2\left(x^3\right)\Big|_0^y dy=\int_0^1\frac{8}{3}y^5dy=\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\left(\frac{8}{15}\times\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{225}$$

خواص واریانس و کوواریانس (a, b, c اعدادی ثابت هستند)

الف) واریانس هر عدد ثابت صفر است. $Var(c)=0$

ب) جمع یا تفریق اثری در واریانس ندارد. $Var(aX\pm b)=a^2Var(X)$

ج) $Var(aX\pm bY+c)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)\pm 2abCov(X,Y)$

د) اگر x و y مستقل باشند کوواریانس صفر است. $Var(aX+bY+c)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)$

هـ) کوواریانس هر متغیر با خودش همان واریانس متغیر است. $Cov(X,X)=Var(X)$

و) کوواریانس اثر جابجایی دارد. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

ر) کوواریانس هر متغیر با یک عدد ثابت صفر است. $Cov(X,c)=0$

ز) جمع و تفریق اثری در کوواریانس ندارد. $Cov(aX\pm b,cY\pm d)=acCov(X,Y)$

اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی باشند آنگاه: $Cov(aX_1+bX_2,Y)=aCov(X_1,Y)+bCov(X_2,Y)$

ضریب همبستگی خطی:

در خاصیت‌های کوواریانس دیدیم که کوواریانس به واحد اندازه‌گیری X و Y بستگی دارد. برای اینکه معیاری برای سنجش رابطه دو متغیر تصادفی x و y پیدا کنیم که به واحد اندازه‌گیری x و y بستگی نداشته باشد، کوواریانس بین $\frac{X}{\sigma_X}$ و $\frac{Y}{\sigma_Y}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$Cov\left(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}}$$

به این معیار ضریب همبستگی خطی گویند. آن را با نماد $\rho(X,Y)$ نمایش می‌دهند.

$$\rho=\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

این ضریب میزان رابطه خطی x و y را می‌سنجد.

خواص ضریب همبستگی خطی:

الف) $\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)$

ب) همواره داریم که $-1\le\rho\le 1$

ج) اگر $Y=aX+b$ و $a>0$ آنگاه $\rho>0$

د) اگر $Y=aX+b$ و $a<0$ آنگاه $\rho<0$

و) اگر X و Y مستقل باشند آنگاه $\rho=0$

مثال ۵۵: فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x<1\,,\,0<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

ضریب همبستگی X و Y را بدست آورید.

پاسخ: برای بدست آوردن ضریب همبستگی خطی ابتدا نیاز به محاسبه کوواریانس و واریانس متغیرهای X و Y می‌باشد که برای محاسبه آنها ابتدا توابع چگالی کناری (حاشیه‌ای) X و Y نیاز است:

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X).E(Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(y)}}$$

$$f_X(x)=\int_0^1(x+y)dy=\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1=x+\frac{1}{2}$$

$$f_Y(y)=\int_0^1(x+y)dx=\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+y$$

$$E(X)=\int_0^1 x(x+\frac{1}{2})=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dx=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

$$Var(X)=\frac{5}{12}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{11}{144}$$

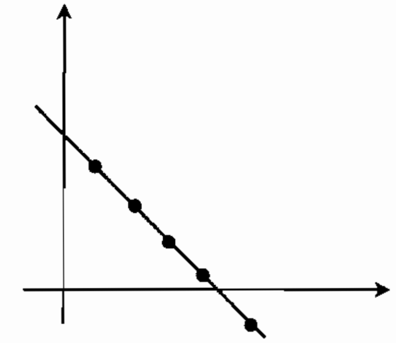
به طور مشابه $E(Y)=\frac{7}{12}$ و $Var(Y)=\frac{11}{144}$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dx\,dy=\int_0^1 y\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y\right)\Big|_0^1dy=\int_0^1 y(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y)dy=\left(\frac{1}{6}y^2+\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

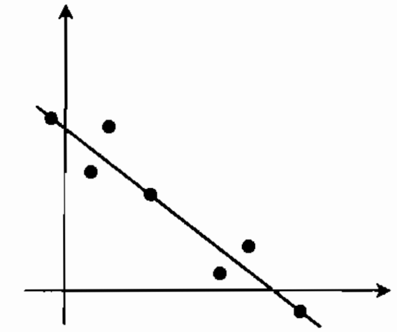
$$Cov(X,Y)=\frac{1}{3}-(\frac{7}{12}\times\frac{7}{12})=-\frac{1}{144}$$

$$\rho=\frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}\times\frac{11}{144}}}=-\frac{1}{11}$$

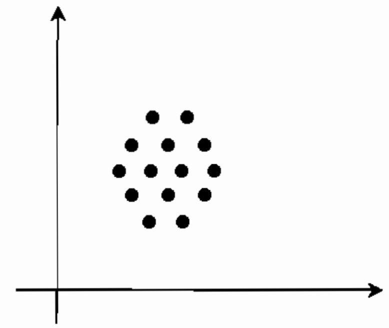
توجه: نقاط پر شده رابطه بین x و y را نشان می‌دهند.



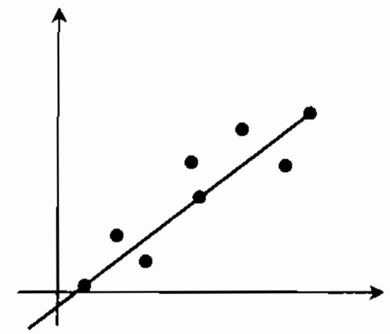
$\rho=-1$



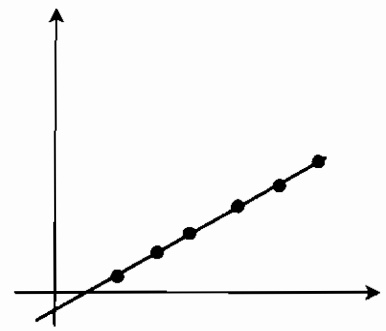
$-1<\rho<0$



$\rho=0$



$0<\rho<1$



$\rho=+1$

امید ریاضی و واریانس شرطی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند. امید ریاضی شرطی و واریانس شرطی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E(X^K|Y=y)=\begin{cases}\sum_x x^k.f_{X|Y}(x|y) & \text{اگر X و Y گسسته باشند}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k.f_{X|Y}(x|y)dx & \text{اگر X و Y پیوسته باشند}\end{cases}$$

$$E(Y^K|X=x)=\begin{cases}\sum_y y^k.f_{Y|X}(y|x) & \text{اگر X و Y گسسته باشند}\\ \int_{-\infty}^{\infty} y^k.f_{Y|X}(y|x)dy & \text{اگر X و Y پیوسته باشند}\end{cases}$$

$$Var(X|Y=y)=E(X^2|Y=y)-(E(X|Y=y))^2$$

$$Var(Y|X=x)=E(Y^2|X=x)-(E(Y|X=x))^2$$

مثال ۵۶: فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی توأم به صورت زیر باشند:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{e^{-y}}{y}\qquad 0<x<y\qquad 0<y<\infty$$

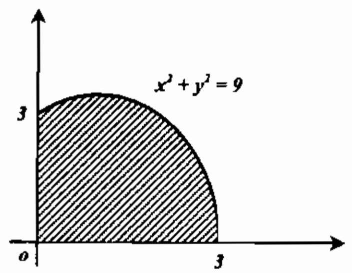
مقدار $E(X^3|Y=y)$ کدام است؟

۱) $\frac{y^2}{2}$ ۲) $\frac{y^3}{3}$ ۳) $\frac{y^3}{4}$ ۴) $\frac{y^2}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای بدست آوردن امید ریاضی شرطی ابتدا باید چگالی شرطی را بدست آوریم:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{e^{-y}}{y}}{\int_0^y \frac{e^{-y}}{y}dx}=\frac{\frac{e^{-y}}{y}}{e^{-y}}=\frac{1}{y}\Rightarrow E(X^3|Y=y)=\int_0^y \frac{x^3}{y}dx=\frac{y^3}{4}$$

مثال ۵۷: فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم یکنواخت بر روی ناحیه‌ای به شکل زیر باشند، $E(Y|X=\sqrt{5})$ را به دست آورید.



۱) $\frac{3\pi}{8}$

۲) $\frac{8}{9\pi}$

۳) ۲

۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» $f(x,y)=c$ می‌باشد، ابتدا مقدار c را مشخص می‌کنیم:

$$1=\iint_R f(x,y)dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 cr\,dr\,d\theta=\frac{c}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\Big|_0^3 d\theta=\frac{9\pi c}{4}\Rightarrow c=\frac{4}{9\pi}$$

بنابراین تابع چگالی احتمال توأم به صورت $f(x,y)=\frac{4}{9\pi}$ می‌باشد.

$$f_X(x)=\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\frac{4}{9\pi}dy=\frac{4}{9\pi}\sqrt{9-x^2}\Rightarrow f_X(\sqrt{5})=\frac{8}{9\pi}$$

$$f(y|\sqrt{5})=\frac{f(\sqrt{5},y)}{f(\sqrt{5})}=\frac{\frac{4}{9\pi}}{\frac{8}{9\pi}}=\frac{1}{2}$$

$$E(Y|X=\sqrt{5})=\int_0^{\sqrt{9-5}}\frac{1}{2}y\,dy=\frac{1}{4}y^2\Big|_0^2=1$$

***مثال ۵۸:** فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی توأم زیر باشند. مقدار $Var(Y \mid X = x)$ کدام است؟*

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{x}e^{-2x} & 0<y<x<\infty \\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۱) $\frac{x^2}{12}$ ۲) $\frac{x}{6}$ ۳) $\frac{x^2}{6}$ ۴) $\frac{x}{12}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در اینجا نیز برای محاسبه واریانس شرطی باید ابتدا چگالی شرطی را بدست آوریم:

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{2}{xe^{2x}}}{2e^{-2x}}=\frac{1}{x} \qquad 0<y<x<\infty$$

$$E(Y\mid X=x)=\int_0^x y.\frac{1}{x}dy=\frac{1}{2}x$$

$$E(Y^2\mid X=x)=\int_0^x y^2.\frac{1}{x}dy=\frac{1}{3}x^2$$

$$Var(Y\mid X=x)=\frac{1}{3}x^2-(\frac{1}{2}x^2)=\frac{1}{12}.x^2$$

محاسبه امید ریاضی با مشروط کردن:

در پاره‌ای از مواقع بهتر است امید ریاضی را با مشروط کردن و با استفاده از رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$E(X)=E(E(X\mid Y))$$

***مثال ۵۹:** یک زندانی در سلولی محبوس است که دارای ۳ درب است. درب اول وی را به تونلی هدایت می‌کند که وی را پس از ۲ روز راهپیمایی به سلول خود بر می‌گرداند. درب دوم وی را به تونلی هدایت می‌کند که وی را پس از ۴ روز راهپیمایی به سلول خود بر می‌گرداند. درب سوم وی را به تونلی هدایت می‌کند که پس از ۱ روز راهپیمایی به آزادی می‌رسد. اگر فرض شود که زندانی همیشه دربهای ۱ و ۲ و ۳ را با احتمالهای به ترتیب ۰/۵ و ۰/۳ و ۰/۲ انتخاب کند، متوسط تعداد روزها تا آزادی زندانی چقدر است؟*

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» اگر X نشان دهنده زمان لازم (برحسب روز) تا رسیدن زندانی به آزادی باشد و Y درب تونلی باشد که او انتخاب می‌کند داریم که:

$$E(X)=E(X\mid Y=1).P(Y=1)+E(X\mid Y=2).P(Y=2)+E(X\mid Y=3).P(Y=3)$$
$$=0/5.E(X\mid Y=1)+0/3E(X\mid y=2)+0/2E(X\mid y=3)=0/5[2+E(X)]+0/3[4+E(X)]+0/2\times 1 \Rightarrow$$
$$0/2E(X)=2/4 \Rightarrow E(X)=12$$

امید ریاضی و واریانس مجموع تعداد تصادفی از متغیرهای تصادفی

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان باشند و N یک متغیر تصادفی غیرمنفی صحیح باشد که مستقل از دنباله $X_i (i \ge 1)$ است. در اینصورت:

$$E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E(N).E(X)$$

$$Var(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E(N).Var(X)+(E(X))^2.Var(N)$$

***مثال ۶۰:** فرض کنید که متوسط تعداد حوادث در هفته، در یک مؤسسه صنعتی ۵ باشد. همچنین فرض کنید که تعداد کارگران آسیب دیده در هر حادثه متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین یکسان ۲/۵ است. اگر تعداد کارگران آسیب دیده در هر حادثه مستقل از تعداد حوادث رخ داده باشد، متوسط تعداد کارگران آسیب دیده در یک هفته کدام است؟*

۱) ۱۰/۵ ۲) ۱۱/۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۳/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$E(\sum_{i=1}^{N} X_i)=E(N).E(X_i)=5\times 2/5=12/5$$

تابع مولد گشتاور

تعریف: گوییم متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال (یا تابع احتمال) $f(x)$ دارای تابع مولد گشتاور است اگر به ازای تمامی مقادیر t در یک همسایگی صفر، $E(e^{tx})$ متناهی باشد. در این صورت تابع مولد گشتاور X را با نماد $M_X(t)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\begin{cases}\sum e^{tx}.P(X=x) & \text{اگر } X \text{ متغیری گسسته باشد} \\ \int e^{tx}.f(x)dx & \text{اگر } X \text{ متغیری پیوسته باشد}\end{cases}$$

توجه :

$$M_X(t)=E(e^{tx})=E(1+tX+\frac{t^2X^2}{2!}+\ldots+\frac{t^nX^n}{n!}+\ldots)=1+tE(X)+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+\ldots+\frac{t^n}{n!}E(X^n)+\ldots$$

توجه : اگر X یک متغیر تصادفی با تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ باشد آنگاه اگر r بار مشتق نسبت به t بگیریم و $t=0$ باشد گشتاور r ام بدست می‌آید:

$$\left.\frac{d^rM_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0}=\mu'_r$$

***مثال ۶۱:** اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد $M_X(t)$ را بدست آورید؟*

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

☑ **پاسخ:** متغیر تصادفی X پیوسته است. بنابراین:

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\int_0^1 e^{tx}1dx=\frac{1}{t}e^{tx}\Big|_0^1=\frac{1}{t}(e^t-1)=\frac{e^t-1}{t}$$

***مثال ۶۲:** تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $t<\frac{1}{4}$, $M_X(t)=(1-4t)^{-4}$ داده شده است. در این صورت $E(X^3)$ برابر است با:*

۱) $4^6\times 6$ ۲) $4^4\times 6$ ۳) $6^4\times 4$ ۴) $6^6\times 4$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$E(X^r)=\frac{d^r}{dt^r}M_X(t)\Big|_{t=0}$$

$$E(X)=8(1-4t)^{-3}\ ,\ E(X^2)=96(1-4t)^{-4}\quad و\quad E(X^3)=1536(1-4t)^{-5}\Big|_{t=0}=1536=4^4\times 6$$

خواص تابع مولد گشتاور

الف ـ برای هر توزیع تصادفی فقط یک تابع مولد گشتاور وجود دارد. یعنی تابع مولد گشتاور منحصر به فرد می‌باشد.

ب ـ اگر X و Y دو متغیر تصادفی با توابع مولد گشتاور $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ باشند آنگاه X و Y دارای توابع توزیع یکسان هستند اگر و فقط اگر: $M_X(t)=M_Y(t)$

ج ـ اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توابع مولد گشتاور $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ باشند آنگاه: $M_{X+Y}(t)=M_X(t).M_Y(t)$

از این خاصیت تابع مولد گشتاور برای تعیین توزیع تابع‌هایی از متغیر تصادفی استفاده می‌شود.

د ـ اگر $M_X(t)$ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X باشد و b یک ثابت مخالف صفر باشد، آنگاه: $M_{(X+\frac{a}{b})}(t)=e^{\frac{at}{b}}M_X(\frac{t}{b})$

نامساوی چبیشف: اگر X یک متغیر تصادفی با واریانس محدود باشد، آنگاه: $P(|X-\mu|<k\sigma)\ge 1-\frac{1}{k^2}$

این نامساوی بیان می‌کند که احتمال اینکه یک متغیر تصادفی مانند X بین k برابر انحراف معیار از میانگین خود قرار گیرد، حداقل برابر با $1-\frac{1}{k^2}$ است.

مثال ۶۳: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای میانگین ۲۵ و واریانس ۱۶ باشد مقدار $P(|X-25|\ge 12)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{10}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$P(|X-25|\ge 12)=P(|X-25|\ge 3\times 4)\le\frac{1}{(3)^2}=\frac{1}{9}$$

مثال ۶۴: دستگاه اتوماتیکی میله‌های فلزی می‌سازد که میانگین طول میله‌ها ۲۰ میلی‌متر و واریانس طول آنها ۰/۰۴ می‌باشد. به طور تصادفی یک میله را انتخاب می‌کنیم. احتمال این که طول میله انتخاب شده کوچکتر از ۱۹/۵ میلی‌متر و بزرگتر از ۲۰/۵ میلی‌متر باشد کدام است؟

۱) ۰/۸۴ ۲) ۰/۹۶ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۷۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق نامساوی چبیشف اگر متغیر X طول میله باشد.

$$P(19/5<X<20/5)=P(|X-20|<0/5)\ \Rightarrow\ K\sigma=0/5\ \Rightarrow\ K=\frac{0/5}{0/2}=2/5$$

$$\Rightarrow\ P(|X-20|<0/5)\ge 1-\frac{1}{(2/5)^2}=0/84$$

تستهای طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱ـ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_X(x)=Ae^{-\alpha|x|}\qquad -\infty<x<\infty$$

که در آن A مقداری ثابت است. احتمال $P(|X|<x_0)$ چقدر است؟ (برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $1-\frac{1}{2}e^{-\alpha x_0}$ ۲) $1-\frac{2}{\alpha}e^{-\alpha x_0}$ ۳) $1-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x_0}$ ۴) $1-e^{-\alpha x_0}$

۲ـ اگر تابع چگالی توأم X و Y به صورت زیر باشد:

$$f_{X,Y}(x,y)=[1-\alpha(1-2x)(1-2y)]\ ,\ 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1$$

$$-1\le\alpha\le 1\qquad (\text{ثابت } \alpha)$$

و $f_X(x)=f_Y(y)=1$، آنگاه به ازای چه مقادیری از α، X و Y ناهمبسته‌اند؟ (برق ـ سراسری ۷۸)

۱) -1 ۲) 0 ۳) $+1$ ۴) ± 1

۳ـ تابع مولد گشتاورهای قانون توزیع احتمال نرمال با میانگین m و پراش σ^2 برابر است با: (برق ـ سراسری ۷۸)

۱) $\Psi(t)=e^{mt-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$ ۲) $\psi(t)=e^{mt+\frac{1}{2}\sigma t}$

۳) $\psi(t)=e^{mt+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$ ۴) $\psi(t)=e^{mt+\sigma^2t^2}$

۴ـ ظرف A شامل ۳ مهره با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. ۲ مهره به تصادف، یک به یک و بدون جایگذاری از ظرف A انتخاب می‌کنیم. متغیرهای تصافی X و Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

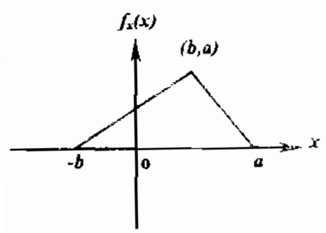
$X=$ شماره اولین مهره‌ای که از ظرف A انتخاب می‌شود

$Y=$ شماره بزرگتر در بین دو مهره‌ای که از ظرف A انتخاب می‌شود

در این صورت $p(X\le 2|Y=3)$ برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) ٪۲۵ ۲) ٪۶۰ ۳) ٪۵۰ ۴) ٪۷۵

۵ـ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X در شکل زیر داده شده است. اگر $a>0$ و $b>0$ باشد بزرگترین مقدار a کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)



۱) $\sqrt{2}$

۲) $\sqrt{3}$

۳) $2\sqrt{2}$

۴) $2\sqrt{3}$

۶ـ تابع چگالی احتمال مشترک متغیرهای تصادفی ξ و η به صورت زیر تعریف شده است:

$$p_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

چگالی احتمال مشروط $p_{\xi|\eta}(x|y)$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۷۸)

۱) $\frac{x+y}{2y+1}$ ۲) $\frac{x+y}{2(2y+1)}$ ۳) $\frac{2(x+y)}{2y+1}$ ۴) $\frac{x+y}{3(2y+1)}$

۷- اگر یک تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد:

$$P(n)=A\binom{n+1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{و} \quad n=0,1,2,3,4,\ldots$$

(A ثابت مثبتی است) که در آن $\binom{n+1}{n}$ تعداد ترکیبات $(n+1)$ حرف n به n می‌باشد، آنگاه ثابت A چقدر است؟

(برق - سراسری ۷۹)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۸- تابع چگالی احتمال مشترک (joint pdf) $f(x,y)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f_{x,y}(x,y)=\begin{cases} Ae^{-x}e^{-y} & , \ 0\le y\le x<\infty \\ 0 & , \ \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

ضریب A کدام است؟ (برق - سراسری ۷۹)

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۹- تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \frac{3}{2}xy & x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم: $h(t)=t^2+2Xt+Y$، آنگاه احتمال آنکه معادله $h(t)=0$ دارای ریشه حقیقی باشد برابر است با:

(کامپیوتر- سراسری ۷۹)

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{7}{16}$ ۴) $\frac{9}{16}$

۱۰- متغیرهای تصادفی ξ و η به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\xi=x+y$$
$$\eta=ax-y$$

که در آن x و y هم متغیرهای تصادفی بوده و می‌دانیم $\sigma_x^2=1$ و $\sigma_y^2=\frac{1}{2}$. اگر بدانیم ضریب همبستگی X و Y برابر ۰/۵ بوده و ξ و η ناهمبسته باشند، مقدار α چقدر است؟ (کامپیوتر- سراسری ۷۹)

۱) ۱- ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۱

۱۱- اگر Y یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد، مقدار ثابت C کدام است؟ (برق - سراسری ۸۰)

$$f_Y(y)=\begin{cases} 0/2 & -1<y\le 0 \\ 0/2+Cy & 0<y\le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

۱) ۰/۴- ۲) ۰ ۳) ۰/۴ ۴) ۱/۲

۱۲- اگر چگالی احتمال توأم متغیرهای X و Y به صورت $f_{(x,y)}(x,y)=\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}\ ;\ 0<x<\infty,\ 0<y<\infty$ باشد، مقدار $E(X\,|\,Y=y)$ کدام است؟ (برق - سراسری ۸۰)

۱) y ۲) $\frac{1}{y}$ ۳) y^2 ۴) $\frac{1}{y^2}$

۱۳- متغیرهای مستقل از هم X_1, X_2, X_3 هر یک دارای چگالی احتمال زیر است:

$$f(x_i)=2x_i \quad 0<x_i<1 \quad i=1,2,3$$

اگر متغیر تصادفی Y به عنوان بزرگترین متغیر تصادفی ازمیان X_1, X_2, X_3 تعریف شود $P(Y\le\frac{1}{2})$ چیست؟

(کامپیوتر- سراسری ۸۰)

۱) $\frac{1}{128}$ ۲) $\frac{1}{64}$ ۳) $\frac{1}{32}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۱۴- اگر (X,Y) دارای تابع چگالی توأم زیر باشند.

$$f_{x,y}(x,y)=\begin{cases} 3x & 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

آنگاه $P(X_1\le\frac{3}{4}\,|\,Y=\frac{1}{2})$ کدام است؟ (کامپیوتر- سراسری ۸۰)

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۵- تابع توزیع (پخش) متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده است:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{x^2}{4} & 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} & 1\le x<2 \\ \frac{x}{3} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

در این صورت $P(X=2)$ و $E(X)$ به ترتیب با کدام گزینه برابر هستند؟ (کامپیوتر- سراسری ۸۱)

۱) $E(X)=\frac{12}{19}, P(X=2)=\frac{1}{6}$ ۲) $E(X)=\frac{19}{12}, P(X=2)=\frac{1}{6}$

۳) $E(X)=\frac{12}{19}, P(X=2)=\frac{2}{3}$ ۴) $E(X)=\frac{19}{12}, P(X=2)=\frac{2}{3}$

۱۶- تابع احتمال توأم X و Y برابر است با

$$P_{XY}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{3} & (x,y)=(-1,0),(0,1),(1,0) \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (ρ_{XY} برابر است با همبستگی بین Y,X) (کامپیوتر- سراسری ۸۱)

۱) $\rho_{XY}=0$ و Y,X مستقلند ۲) $\rho_{XY}\ne 0$ و Y,X مستقلند

۳) $\rho_{XY}=0$ و Y,X مستقل نیستند. ۴) $\rho_{XY}\ne 0$ و Y,X مستقل نیستند.

۱۷- تابع چگالی احتمال دامنهٔ یک سیگنال تصادفی به صورت روبرو است: $f_X=\frac{A}{1+X^2}\ ;-\infty<x<\infty$

احتمال $P[|X|<1]$ برابر است با: (برق- سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{2\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\pi}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۸- تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی Y,X به صورت زیر مفروض است؟

$$f_{x,y}(x,y)=\begin{cases} 6x & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

در اینصورت، مقدار $P(X+Y<1)$ کدام است؟ (کامپیوتر- سراسری ۸۲)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۹ـ اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۹ باشد، آنگاه میانگین متغیر تصادفی $Y = X^2(X+1)$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۲۰ـ متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع $F_X(x)$ است. اگر F تابعی اکیداً صعودی و $Y = F(X)$، آنگاه حاصل $P(Y - E[Y] < \frac{1}{4})$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۲)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۱ـ دو عدد X و Y به طور تصادفی بین صفر و یک انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم که A و B دو واقعه به صورت $A = \{X < 0/25\}$ و $B = \{X < Y\}$ باشند، احتمال $P(A|B)$ برابر است با: (برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{7}{16}$

۲۲ـ فرض کنید متغیر تصادفی x مقادیر ۰، ۱، ۲ را انتخاب می‌کند و برای یک ثابت c داشته باشیم: $P(x=i) = cP(x=i-1)\ ,\ i=1,2$. امید متغیر تصادفی x کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{c+2c^2}{1+c+c^2}$ ۲) $\frac{1+c}{1+c+c^2}$ ۳) $\frac{c}{1+c+c^2}$ ۴) $\frac{c+c^2}{1+c+c^2}$

۲۳ـ متغیر تصادفی x دارای چگالی احتمال زیر است: $f(x) = \begin{cases} ax+bx^2 & ,\ 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ اگر بدانیم $E(X) = 0/6$، آنگاه احتمال $P(X < 0/5)$ کدام است؟ (برق ـ سراسری ۸۴)

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۳۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۵

۲۴ـ متغیرهای تصادفی Y,X مستقل و هم توزیع با متوسط برابر با ۱- و انحراف برابر ۲ هستند در این صورت $Var(XY)$ برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) ۲۴ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۲۵ـ تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی y,x به صورت زیر مفروض است:

$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$ در این صورت مقدار $E[X^2 | y=2]$ کدام است؟ (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۶ـ احتمال آن که متغیر تصادفی X با توزیع احتمال کوشی با تابع چگالی احتمال $-\infty < x < \infty\ ;\ F(X) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ دارای قدرمطلق کوچکتر از $\sqrt{3}$ باشد برابر است با: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) ۲۴ ۲) ۲۰ ۳) ۱۶ ۴) ۸

۲۷ـ فرض کنید ۱۰ سکه داریم که اگر سکه Iام را پرتاب کنیم با احتمال $\frac{i}{10}$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ شیر ظاهر می‌شود. حال یک عدد به تصادف بین ۱ تا ۱۰ انتخاب کردیم و آن گاه سکه شماره Iام که برابر با عدد منتخب است، را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار شیر ظاهر شود. حال اگر بدانیم مقدار عدد ظاهر شده حداکثر ۲ باشد. به طور متوسط چه تعداد پرتاب لازم است تا به اولین شیر برسیم؟ (مؤلف)

۱) ۷/۵ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۴/۵

۲۸ـ اگر متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور $t < 1\ ;\ M_X(t) = (1-t)^{-3}$ باشد $E(X^n)$ کدام است؟ (مؤلف)

۱) $\frac{n!}{2!}$ ۲) $\frac{(n+2)!}{2!}$ ۳) $\frac{(n+1)!}{2!}$ ۴) $n!$

۲۹ـ مقدار $COV(X_i - \overline{X}, \overline{X})$ همواره برابر با ...... است. (مؤلف)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{\delta^2}{n}$

۳۰ـ اگر $0 < \frac{x}{y} < \infty\ ;\ f(x,y) = e^{-x-y}$ باشد تابع مولد گشتاور $Z = X + Y$ کدام است؟ (مؤلف)

۱) $\frac{1}{1-t}$ ۲) $\frac{1}{(1-t)^2}$ ۳) $\frac{1}{1-t^2}$ ۴) $\frac{1}{t}$

پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل سوم

۱ـ گزینه «۴» با توجه به خاصیت تابع چگالی احتمال:

$$(I): \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\alpha|x|}dx = 1 \longrightarrow \int_{-\infty}^{0} Ae^{\alpha x}dx + \int_{0}^{\infty} Ae^{-\alpha x}dx = 1$$

$$\to \left[\frac{A}{\alpha}e^{\alpha x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{A}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_{0}^{\infty} = 1 \to 2\frac{A}{\alpha} = 1 \to A = \frac{\alpha}{2}$$

$$(II): P(|X|<x_0) = P(-x_0<X<x_0) = \int_{-x_0}^{x_0}\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|}dx = \int_{-x_0}^{0}\frac{\alpha}{2}e^{\alpha x}dx + \int_{0}^{x_0}\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha x}dx$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right]_{-x_0}^{0} + \frac{\alpha}{2}\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_{0}^{x_0} = 1 - e^{-\alpha x_0}$$

۲ـ گزینه «۲»

$$\boxed{f(x,y) = f(x)\times f(y) \Leftrightarrow x,y \text{ مستقل}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = [1-\alpha(1-2x)(1-2y)] \\ f(x) = 1 \\ f(y) = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\alpha=0} f(x,y) = f(x)\times f(y) \longrightarrow x,y \text{ مستقل} \longrightarrow Cov(x,y) = 0$$

x و y ناهمبسته

۳ـ گزینه «۳» با توجه به توزیع پیوسته نرمال:

$$M_X(t) = e^{Mt + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

۴ـ گزینه «۳»

X = شماره اولین مهره‌ای که از ظرف A انتخاب می‌شود

Y = شماره بزرگتر در بین دو مهره انتخاب شده

$$\{(1,2)\ (1,3)\ (2,1)\ (2,3)\ (3,3)\ (3,2)\}$$

$$P(x\le 2|y=3) = \frac{P(x\le 2, y=3)}{P(y=3)} = \frac{P(x=1,y=3)+P(x=2,y=3)}{P(x=1,y=3)+P(x=2,y=3)+P(x=3,y=3)+P(x=3,y=1)}$$

$$= \frac{2}{4} = 0/50$$

۵ـ گزینه «۱» مساحت مثلث: $\frac{(a+b)a}{2} = 1 \Rightarrow a^2+ab = 2 \quad b = \frac{2-a^2}{a} \xrightarrow{b>0,\, a>0} 2-a^2>0 \to a<\sqrt{2}$

۶ـ گزینه «۳»

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)} = \frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\int_0^1 \frac{1}{3}(x+y)dx} = \frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Big|_0^1} = \frac{x+y}{\frac{1}{2}+y} = \frac{2(x+y)}{1+2y}$$

۷ـ گزینه «۲» یادآوری:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} = t^1 + t^2 + \cdots = \frac{t}{1-t} \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{مشتق‌گیری}} \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = \frac{1}{(1-t)^2}} \\ 0<t<1 \end{cases}$$

طبق خاصیت تابع احتمال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A\binom{n+1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^n = A\times\frac{4}{9}\times\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$$

بنابر یادآوری $\Rightarrow A\times\frac{4}{9}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = A\times\frac{4}{9}\times\frac{9}{4} = 1 \Rightarrow A = 1$

۸ـ گزینه «۱»

$$\iint f(x,y)dxdy = \iint f(x,y)dydx = 1$$

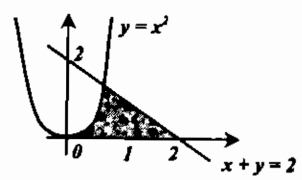
$$\int_0^{\infty}\int_0^{x} Ae^{-x}e^{-y}dydx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} Ae^{-x}\left[e^{-y}\right]_0^x dx = 1$$

$$A\int_0^{\infty}(-e^{2x}+e^{-x})dx = A\left[+\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow A = 2$$

۹ـ گزینه «۳»

$$h(t) = t^2 + 2xt + y \xrightarrow[\text{حقیقی}]{\text{ریشه}} \Delta\ge 0 \to x^2 - y \ge 0 \to y \le x^2$$

$$P = \int_0^1\int_{2-y}^{\sqrt{y}}\frac{3}{2}xydxdy = \frac{7}{16}$$



۱۰ـ گزینه «۳»

$$cov(\xi,\eta) = cov(X+Y, \alpha X - Y) = -cov(X,Y) + \alpha\, cov(X,X) + \alpha\, cov(Y,X) - cov(Y,Y)$$

$$= \alpha - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \alpha\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \alpha \simeq 0/63 \simeq \frac{2}{3}$$

۱۱ـ گزینه «۴»

$$f(y) = \begin{cases} 0/2 & -1<y\le 0 \\ 0/2+Cy & 0<y\le 1 \\ 0 & \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^{0} 0/2dy + \int_0^1 (0/2+Cy)dy = 1 \Rightarrow [0/2y]_{-1}^{0} + \left[0/2y + \frac{cy^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow C = 1/2$$

۱۲ـ گزینه «۱»

$$f(x,y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{\int_0^{\infty} f(x,y)dx}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{\underbrace{\left[-e^{\frac{-x}{y}}e^{-y}\right]_0^{\infty}}_{e^{-y}}}=\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}$$

$$E(x\mid y)=\int_0^{\infty} xf(x\mid y)dx=\underbrace{\int_0^{\infty} xe^{-\frac{x}{y}}dx}_{\text{انتگرال‌گیری جز به جز}}=y$$

۱۳ـ گزینه «۲»

$$X_1,X_2,X_3:\text{مستقل}\Rightarrow F(X_1,X_2,X_3)=F(X_1)F(X_2)F(X_3)$$

$$Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$$

$$P(Y\le\frac{1}{2})=P(X_1\le\frac{1}{2},X_2\le\frac{1}{2},X_3\le\frac{1}{2})=P(X_1\le\frac{1}{2})P(X_2\le\frac{1}{2})P(X_3\le\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$$

$$P(X_i\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}2X_i\,dX_i=2\times\frac{X_i^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

۱۴ـ گزینه «۴»

$$f(y)=\int_y^1 3x\,dx=\frac{3}{2}x^2\Big|_y^1=\frac{3}{2}(1-y^2)$$

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)}=\frac{2x}{1-y^2}$$

$$P(X\le\frac{3}{4}\mid y=\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{2x}{(1-(\frac{1}{2})^2)}dx=\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{8}{3}x\,dx=\frac{4}{3}x^2\Big|_0^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$$

۱۵ـ گزینه «۲» از $F_X(x)$ مشتق می‌گیریم (در نقاطی که مشتق‌پذیر است)

توجه کنید تابع $f(x)$ در نقاط ۱ و ۲ گسستگی دارد.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & ;\ 0<x<1\\ \frac{1}{4} & ;\ x=1\\ \frac{1}{6} & ;\ x=2\\ \frac{1}{3} & ;\ 2<x<3\\ 0 & ;\ \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$P(X=0)=0$$

$$P(X=1)=F(1)-F(\bar{1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=2)=F(2)-F(\bar{2})=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=3)=0$$

$$E(x)=\underbrace{\int x.f(x)dx}_{\text{پیوسته}}+\underbrace{\sum x.f(x)}_{\text{گسسته}}=\int_0^1 x.\frac{x}{2}dx+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{6}+\int_2^3 x.\frac{1}{3}dx=\frac{19}{12}$$

۱۶ـ گزینه «۳» $x,y: f(-1,0)\neq f(-1).f(0)$ مستقل نیستند.

y \ x	−1	0	1	f(y)	
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$:f(y=0)$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$:f(y=1)$
f(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	

$$f(x=1\mid y=0)=\frac{f(x=1,y=0)}{fy(y=0)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$f(y=1\mid x=-1)=\frac{0}{\frac{1}{3}}=0$$

$$E(x)=\frac{1}{3}\times(-1)+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$$

$$E(x.y)=(-1)\times0\times\frac{1}{3}+(0)\times1\times\frac{1}{3}+0\times0\times0+1\times(-1)\times0+1\times0\times\frac{1}{3}+1\times1\times0=0$$

$$cov(x.y)=E(x.y)^{\nearrow 0}-E(x)^{\nearrow 0}E(y)=0\Rightarrow\rho_{x,y}=0$$

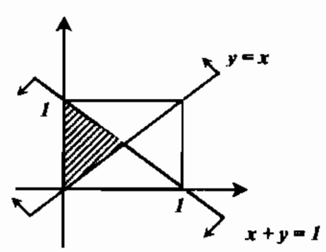
۱۷ـ گزینه «۴»

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{1+x^2}dx=A\left[\text{Arctag}x\right]_{-\infty}^{+\infty}=1\Rightarrow A\left[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right]=1\Rightarrow A=\frac{1}{\pi}$$

$$P(|X|<1)=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{2}{\pi}tg^{-1}x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

۱۸ـ گزینه «۴»

$$f(x,y)=\begin{cases}6x & 0<x<y<1\\ 0 & \text{سایرنقاط}\end{cases}$$



$$P(x+y<1)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_x^{1-x}6x\,dy\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}6s(1-2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x-12x^2)dx=3x^2-4x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

۱۹ـ گزینه «۲»

$$E(x)=E(x^3)=E(x^5)=\cdots=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu_x=E(x)=0\rightarrow E(x^3)=0\\ \delta_x^2=E(x^2)-E(x)^2=9\Rightarrow E(x^2)=9\end{array}\right\}\Rightarrow E\left(x^2(x+1)\right)=E(x^3+x^2)=E(x^3)+E(x^2)=9$$

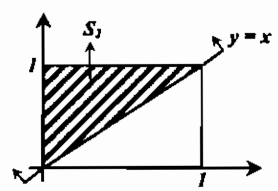
۲۰ـ گزینه «۲» می‌دانیم $0 \le F_X(x) \le 1$

$$0 \le y = F_X(x) \le 1 \xrightarrow[\text{یکنواخت}]{y} \begin{cases} f(y)=\frac{1}{1-0}=1 \\ 0\le y\le 1\end{cases} \qquad E(y)=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$$

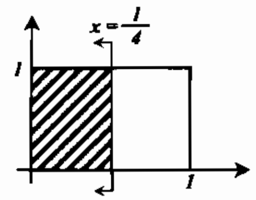
$$P(y-E(y)\le \frac{1}{4})=P(y-\frac{1}{2}<\frac{1}{4})=P(y<\frac{3}{4})=\int_0^{\frac{3}{4}} 1\,dy=\frac{3}{4}$$

۲۱ـ گزینه «۴»

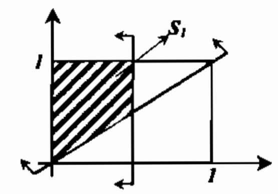
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{7}{32}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{16}$$



$B=\{x<y\}$



$A=\{x<0.25\}$



$A\cap B=\{x>y, x<0.25\}$

۲۲ـ گزینه «۱» ابتدا احتمالات متغیر X در نقاط صفر و ۱ و ۲ را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases}p(x=i)=cp(x=i-1)\\ i=1,2\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} p(x=1)=cp(x=0)\\ p(x=2)=cp(x=1)=c^2p(x=0)\end{array}$$

$$p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=1 \Rightarrow \begin{cases} p(x=0)=\frac{1}{1+c+c^2}\\ p(x=1)=\frac{c}{1+c+c^2}\\ p(x=2)=\frac{c^2}{1+c+c^2}\end{cases}$$

x	0	1	2
p(x)	$\frac{1}{1+c+c^2}$	$\frac{c}{1+c+c^2}$	$\frac{c^2}{1+c+c^2}$

$$\Rightarrow E(x)=\sum x\,p(x)=0\times\frac{1}{1+c+c^2}+1\times\frac{c}{1+c+c^2}+2\times\frac{c^2}{1+c+c^2}=\frac{c+2c^2}{1+c+c^2}$$

۲۳ـ گزینه «۲» طبق خاصیت تابع چگالی احتمال:

$$\int_0^1 (ax+bx^2)dx=1 \Rightarrow \left[\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}\right]_0^1=1 \Rightarrow 3a+2b=6$$

$$E(x)=\int_0^1 x(ax+bx^2)dx=0.6 \Rightarrow \left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^4}{4}\right]_0^1=0.6 \Rightarrow 4a+3b=7.2 \Rightarrow a=3.6,\ b=-2.4$$

$$P(X<0.5)=\int_0^{0.5}(3.6x-2.4x^2)dx=\left[\frac{3.6x^2}{2}-\frac{2.4x^3}{3}\right]_0^{0.5}=0.35$$

۲۴ـ گزینه «۱»

$$\left.\begin{array}{l}E(X)=E(Y)=-1\\ \sigma_X^2=\sigma_Y^2=4\end{array}\right\}\ \sigma_X^2=E(X^2)-E(X)^2\Rightarrow E(X^2)=E(Y^2)=5$$

$$Var(XY)=E(X^2Y^2)-(E(XY))^2=E(X^2)E(Y^2)-E(X)^2E(Y)^2=5\times5-1\times1=24$$

۲۵ـ گزینه «۴»

$$f(x^2|y)=\frac{f(x^2,y)}{f(y)}=\frac{e^{-y}}{\int_0^2 e^{-y}dx}=\frac{e^{-y}}{2e^{-y}}=\frac{1}{2}$$

$$E(x^2|y)=\int_0^2 x^2 f(x^2|y)dx=\int_0^2 x^2\frac{1}{2}dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

۲۶ـ گزینه «۲»

$$P(|X|<\sqrt{3})=P(-\sqrt{3}<X<\sqrt{3})=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\pi(x^2+1)}dx=\frac{1}{\pi}[\text{Arctg}x]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{3})\right]=\frac{2}{3}$$

۲۷ـ گزینه «۱»

۲۸ـ گزینه «۲» بسط سری مک لورن تابع $(1-t)^{-3}$ عبارت است از:

$$[(1-t)^{-3}=1+3(t)+3\times4\frac{t^2}{2!}+(3\times4\times5)\frac{t^3}{3!}+\cdots+(3\times4\times5\times\cdots\times(n+2))]\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

$$E(X^n)=[3\times4\times5\times\cdots\times(n+2)]=\frac{(n+2)!}{2!}$$

۲۹ـ گزینه «۴»

۳۰ـ گزینه «۲» X و Y مستقلند.

$$M_X(t)=\int_0^{\infty} e^{tx}.e^{-x}\,dx=\frac{1}{1-t}$$

$$M_Y(t)=\int_0^{\infty} e^{ty}.e^{-y}\,dy=\frac{1}{1-t}$$

$$M_Z(t)=M_X(t).M_Y(t)=\frac{1}{(1-t)^2} \qquad t<1$$

آزمون فصل سوم

۱ـ به ازای چه مقادیری از k می‌توان تابع زیر را به عنوان تابع چگالی یک متغیر تصادفی به کار برد؟

$$f(x)=(1-k)k^x \qquad x=0,1,2,\dots$$

۱) $k=1$ ۲) $k\ge 1$ ۳) $0<k<1$ ۴) k هر مقدار طبیعی می‌تواند بگیرد.

۲ـ متغیر تصادفی X به صورت زیر می‌باشد. مقدار C کدام است؟

$$f(x)=\frac{c}{\sqrt{x}} \qquad 0<x<4$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{4}$

۳ـ سه توپ به طور تصادفی و بدون جایگذاری از ظرفی که شامل ۲۰ توپ از شماره ۱ تا ۲۰ است انتخاب می‌کنیم. اگر بخواهیم یک تابع احتمال برای بزرگترین عدد انتخاب شده در این نمونه ۳ تایی بدست آوریم کدام گزینه صحیح است؟

۱) $p(X=x)=\dfrac{1}{\binom{20}{3}}\ ,\ x=1,2,\dots,20$

۲) $p(X=x)=\dfrac{\binom{20}{x}}{\binom{20}{3}}\ ,\ x=1,2,3$

۳) $p(X=x)=\dfrac{\binom{20-x}{2}}{\binom{20}{3}}\ ,\ x=3,4,\dots,20$

۴) $p(X=x)=\dfrac{\binom{x-1}{2}}{\binom{20}{3}}\ ,\ x=3,4,\dots,20$

۴ـ pdf متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شده، میانه این متغیر کدام است؟

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} \qquad x>0$$

۱) ۱/۳۹ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۲۲۱ ۴) ۰/۶۹۵

۵ـ تابع جرمی احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر است. مقدار k کدام است؟

$$p(x=k)=k\left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad x=0,1,2,\dots$$

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۶ـ از بین N کوپن که با شماره‌های N ,...,۳ ,۲ ,۱ متمایز شده‌اند، تعداد n کوپن به تصادف انتخاب می‌شود. اگر متغیر تصادفی X برابر با مینیمم اعداد بدست آمده در نمونه باشد، تابع احتمال X برابر کدام یک از عبارات زیر است؟ $(1\le x\le N)$

۱) $\dfrac{\binom{N-x}{n-1}}{\binom{N}{n}}$ ۲) $\dfrac{x}{n}$ ۳) $\dfrac{N-x}{N}$ ۴) $\dfrac{\binom{N-1}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

۷ـ تابع چگالی طول عمر یک قطعه از ماشین صنعتی بر حسب سال به صورت زیر تعریف می‌شود، مقدار a کدام است؟

$$f(x)=\frac{a}{x^2} \qquad x>10$$

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{100}$ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

۸ـ فرض کنید x دارای تابع مولد گشتاور روبرو باشد آنگاه $p(X\geq 2)$ کدام است؟ $M_\alpha(t)=\left[Exp(\alpha e^t-1)\right]$

۱) ۰/۷۶۴ ۲) ۰/۰۱۳ ۳) ۰/۹۸۷ ۴) ۰/۴۴۱

۹ـ فرض کنید X دارای تابع چگالی به صورت زیر باشد مقدار C کدام است؟

$$f_X(x)=cxe^{-\frac{x}{2}} \qquad x>0$$

۱) $\frac{1}{32}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۱۰ـ فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت در فاصله (۱ و ۰) است حال ۳ نمونه از توزیع مذکور انتخاب می‌کنیم آنگاه $y=\min(x_1,x_2,x_3)$ دارای کدام توزیع زیر است؟

۱) $f_y(y)=3(1-y)^2 \quad 0<y<1$ ۲) $f_y(y)=1-y^3 \quad 0<y<1$

۳) $f_y(y)=4y^3 \quad 0<y<1$ ۴) $f_y(y)=1-3y^2 \quad 0<y<1$

۱۱ـ اگر X یک متغیر تصادفی با دامنه‌ی $x=1,2,3,\ldots$ باشد و تابع چگالی احتمال آن $P(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ باشد و همچنین $B=\{1,3,5,\ldots\}$ در این صورت $P(X\in B)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۱۲ـ اگر تابع مولد گشتاور توأم (x,y) برابر با $M_{X,Y}(t_1,t_2)=\dfrac{e^{\frac{t_1^2}{2}}}{1-t_1-t_2}$ باشد تابع مولد گشتاور x کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-t_1}.e^{\frac{t_1^2}{2}}$ ۲) $\frac{1}{1-t_1}$ ۳) $\dfrac{e^{\frac{t_2^2}{2}}}{1-t_2}$ ۴) هیچ کدام

۱۳ـ اگر تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به صورت $f(x_1,x_2)=e^{-(x_1+x_2)}$ ؛ $x_1,x_2>0$ تعریف شده باشد آنگاه $Var(X_1+X_2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۰

۱۴ـ فرض کنید X دارای تابع مولد گشتاور به شکل زیر باشد. آنگاه $E(X^2)$ کدام است؟

$$M_X(t)=\frac{e^{-t}}{6}+\frac{1}{2}+\frac{e^t}{6}+\frac{e^{2t}}{6}$$

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۵ـ از جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۵ مهره آبی دو مهره بدون جایگذاری به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر مهره‌ها از یک رنگ باشند آنگاه ۲ تومان جایزه می‌گیریم و اگر از رنگهای متفاوت باشند ۱ تومان جریمه شویم مقدار انتظار شما از شرط‌بندی چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۱۱- ۳) ۰/۳۳۳ ۴) ۰

۱۶ـ ظرفی شامل n_1 مهره سفید و n_2 مهره سیاه و n_3 مهره قرمز می‌باشد. C مهره از ظرف بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. امید ریاضی تعداد مهره‌های سفید انتخاب شده کدام است؟

۱) $C\left[\frac{n_3+n_2}{n_1+n_2+n_3}\right]$ ۲) $\frac{cn_1}{n_1+n_2+n_3}$ ۳) $\frac{cn_1}{n_1n_2n_e}$ ۴) $\frac{cn_2n_3}{n_1+n_2+n_3}$

۱۷ـ در یک مغازه لبنیاتی تقاضای روزانه شیر X (برحسب هزار لیتر) است که تابع چگالی آن بصورت مقابل است $0<x<1$ $f(x)=3x^2$ و صفر در سایر نقاط. مغازه‌دار شیر را لیتری ۶ تومان می‌خرد و ۱۰ تومان می‌فروشد. اگر او بخواهد K ۱۰۰۰ لیتر شیر سفارش دهد مقدار K چقدر باشد تا سود حداکثر گردد

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt[3]{\frac{4}{10}}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۸ـ فرض کنید تابع چگالی توأم ۳ متغیر تصادفی پیوسته X، Y و Z بصورت زیر باشد:

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=2z \quad 0\leq x\leq 1 \quad 0\leq y\leq 1 \quad 0\leq z\leq 1$$

در این صورت $P\left(X<\frac{1}{2}\middle|Y<\frac{1}{2},Z=\frac{1}{2}\right)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۰ ۳) ۰/۳۸۶ ۴) ۰/۲۵

۱۹ـ در ناحیه‌ای ۱۰ نوع مختلف حشره زندگی می‌کنند و هر دفعه که حشره‌ای به دام می‌افتد مستقل از نوع حشره قبلی با احتمال $\frac{1}{10}$ از نوع i ام است $(i\text{s } 1,2,\ldots,10)$ حال متوسط تعداد انواع حشراتی که قبل از به دام افتادن حشره نوع ۱ به دام افتاده‌اند کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۹/۵ ۴) ۴/۵

۲۰ـ فرض کنید X_1 و X_2 دو مقدار تصادفی در فاصله $(1,0)$ می‌باشند که مستقل از هم انتخاب شده‌اند. حال مقدار $E|X_1-X_2|$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

فصل چهارم

« توزیعهای آماری »

توزیعهای گسسته:

توزیع برنولی: آزمایشی تصادفی را در نظر بگیرید که دارای دو نتیجه موفقیت با احتمال p و شکست با احتمال $q = 1 - p$ باشد. چنین آزمایش تصادفی را آزمایش برنولی گویند اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر نتیجه آزمایش موفقیت باشد} \\ 0 & \text{اگر نتیجه آزمایش شکست باشد} \end{cases}$$

در اینصورت متغیر تصادفی X را متغیر تصادفی برنولی گوئیم، آن را با نماد $X \sim B(1,p)$ نشان می‌دهیم. ویژگی‌های این توزیع به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} f_X(x) = P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x} & x = 0,1 \quad (\text{تابع احتمال توزیع برنولی}) \\ E(X) = p \\ Var(X) = pq \\ M_X(t) = q + pe^t \end{cases}$$

مثال ۱: تاسی را یکبار پرتاب می‌کنیم برای ما آمدن عدد ۶ موفقیت است در اینصورت تابع احتمال، امید ریاضی و واریانس این متغیر را بدست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$P(X=x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x} \qquad x = 0,1$$

$$E(X) = \frac{1}{6} \qquad Var(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

توزیع دو جمله‌ای: اگر متغیر X به صورت زیر تعریف شود آنگاه X یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای است.

X: تعداد موفقیتها در n بار آزمایش مستقل برنولی

آن را با نماد $X \sim B(n,p)$ نمایش می‌دهیم. ویژگی‌های آن به صورت زیر است:

$$f_X(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} . p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

$$E(X) = n.p$$

$$Var(X) = n.p.q$$

$$M_X(t) = (q + pe^t)^n$$

مثال ۲: تاسی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه دقیقاً ۳ بار عدد ۶ مشاهده شود چقدر است؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۰۳۲ ۴) ۰/۷۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با یک توزیع دو جمله‌ای روبرو هستیم:

$$X \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right)$$

$$P(X=x) = \binom{5}{x} . \left(\frac{1}{6}\right)^x . \left(\frac{5}{6}\right)^{5-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,5$$

$$P(X=3) = \binom{5}{3} . \left(\frac{1}{6}\right)^3 . \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0/032$$

مثال ۳: طول عمر لامپ خاصی برحسب ساعت یک متغیر تصادفی با تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 100 \\ \dfrac{100}{x^2} & x > 100 \end{cases}$$

احتمال اینکه ۲ لامپ از ۵ لامپ انتخابی ۱۵۰ ساعت عمر کنند چقدر است؟

۱) $\frac{80}{243}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{50}{243}$ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق توزیع دو جمله‌ای:

$$p(\text{یک لامپ ۱۵۰ ساعت عمر کند}) = \int_{100}^{150} f(x)\,dx = \int_{100}^{150} (100)x^{-2}\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال مطلوب} = \binom{5}{2} . \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

مثال ۴: فرض کنید موتورهای هواپیما در حال پرواز با احتمال $1 - p$ مستقل از یکدیگر خراب می‌شوند. اگر در یک پرواز موفقیت آمیز لازم باشد اکثریت موتورهای هواپیما سالم باشند برای چه مقداری از p ، یک هواپیمای ۵ موتوره مطمئن‌تر از یک هواپیمای سه موتوره است؟

۱) $p \le \frac{1}{2}$ ۲) $p \ge \frac{1}{2}$ ۳) $p \ge \frac{3}{4}$ ۴) $p \le \frac{3}{4}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$P(\text{کارکردن هواپیمای ۵ موتوره}) \ge P(\text{کارکردن هواپیمای ۳ موتوره})$$

$$\Rightarrow \binom{5}{5} . p^5 (1-p)^0 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 \ge \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0 + \binom{3}{2} p^2 (1-p)$$

$$\Rightarrow 10p^3 - 20p^4 + 10p^5 + 5p^4 - 5p^5 + p^5 \ge p^3 - 3p^3 + 3p^2 \;\Rightarrow\; 2p - 1 \ge 0 \;\Rightarrow\; p \ge \frac{1}{2}$$

خواص توزیع دو جمله‌ای:

۱) اگر متغیر تصادفی X توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و p داشته باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$P(X=K+1)=\frac{p(X=n-K)}{(1-p)(K+1)}\cdot P(X=K)$$

۲) اگر y یک متغیر دو جمله‌ای به صورت $Y\sim B(n-1,p)$ باشد ; $E(X^K)=npE[(Y+1)^{K-1}]$

۳) X و Y مستقل هستند.

$$\begin{array}{l} X\sim B(n,p) \text{ اگر} \\ Y\sim B(m,p) \text{ اگر} \end{array} \Rightarrow X+Y\sim B(m+n,p)$$

توزیع چند جمله‌ای:

اگر یک آزمایش بتواند k نتیجه ناسازگار $E_1,E_2,\dots,E_k$ با احتمالات به ترتیب $P_1,P_2,\dots,P_k$ داشته باشد و این آزمایش n دفعه به صورت مستقل تکرار شود به طوری که احتمالات فوق از آزمایشی به آزمایش دیگر تغییر نکند یک آزمایش چند جمله‌ای را خواهیم داشت.

$$f(x_1,x_2,\dots,x_k;p_1,p_2,\dots,p_k,n)=\frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}p_1^{x_1}.p_2^{x_2}\dots p_k^{x_k}$$

$$\sum_{i=1}^{k}x_i=n \quad ; \quad \sum_{i=1}^{k}p_i=1$$

مثال ۵: ۸۵% از قطعاتی که در یک کارگاه تولید می‌شود سالم است. ۱۰% ناقص و قابل دوباره‌کاری و ۵% ناقص و دورریختنی است. فرض بر این است که این درصدها در طول زمان ثابت باقی می‌مانند. در یک نمونه تصادفی ۲۰ تایی از قطعات تولید شده اگر تعداد قطعات سالم را با متغیر تصادفی X_1 و تعداد قطعات قابل دوباره کاری را با X_2 و دور ریختنی را با X_3 نشان دهیم تابع احتمال را بدست آورید.

$$f(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)=\frac{20!}{x_1!x_2!x_3!}\cdot(0/85)^{x_1}(0/10)^{x_2}.(0/05)^{x_3}$$

توجه : در حالتی که k = ۳ باشد، یک توزیع سه جمله‌ای خواهیم داشت که توزیع احتمال آن به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x,y,n-x-y,p_1,p_2,1-p_1-p_2,n)=\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}\cdot p_1^x p_2^y(1-p_1-p_2)^{n-x-y}$$
$$x+y\le n$$

توجه : در یک توزیع سه جمله‌ای توزیع احتمال Y به شرط X = x عبارت است از:

$$f(y\mid X=x)=\frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!}\left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^y.\left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-x-y} \quad ; \quad y=0,1,2,\dots,n-x$$

$$\Rightarrow Y\mid X=x\sim B\left(n-x,\frac{p_2}{1-p_1}\right)$$

توزیع فوق هندسی:

فرض کنید جامعه‌ای به دو قسمت جمعیت موفقیت و جمعیت شکست تقسیم می‌شود که یکی M تایی و دیگری N − M تایی است (N کل جمعیت است) می‌خواهیم n عضو از این جمعیت N تایی را بدون جایگذاری انتخاب کنیم. چنین آزمایشی را آزمایش فوق هندسی گویند.

اگر X به صورت روبرو تعریف شود با یک متغیر فوق هندسی روبرو هستیم که ویژگیهای آن به صورت زیر می‌باشد:

X : تعداد موفقیتها در یک آزمایش فوق هندسی

تعداد موفقیتها در n آزمایش غیرمستقل برنولی

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \max(0,n-N+M)\le x\le \min(n,M)$$

$$E(X)=\frac{nM}{N}$$

$$Var(X)=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)$$

مثال ۶: در انتخاب ۵ لامپ از بین ۴۰ لامپ که ۳ تای آنها معیوب است. احتمال اینکه حداکثر یک لامپ انتخاب شده معیوب باشد کدام است؟

۱) ۰/۹۶ ۲) ۰/۷۳ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینه «۱» طبق تابع احتمال متغیر فوق هندسی:

$$P(X\le 1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{37}{5}}{\binom{40}{5}}+\frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}=0/963$$

تقریب توزیع فوق هندسی بوسیله توزیع دوجمله‌ای:

اگر در آزمایش فوق هندسی n نسبت به N عدد کوچکی باشد آنگاه انتخاب اعضاء در مراحل مختلف دارای احتمالات تقریباً یکسان هستند. یعنی انتخاب اعضاء را می‌توان تقریباً با جایگذاری در نظر گرفت که در این حالت آزمایش فوق هندسی به آزمایش دو جمله‌ای تبدیل می‌شود. در این صورت می‌توان توزیع فوق هندسی را با توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و $p=\frac{M}{N}$ تقریب زد.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

مثال ۷: از بین ۲۰۰ متقاضی شغلی، تنها ۷۰ نفر واجد شرایط هستند اگر ۶ نفر را بر حسب تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه ۳ نفر آنها واجد شرایط باشند، چقدر است؟

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۴۲ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۶۵

پاسخ: گزینه «۱» همانطور که می‌بینیم n نسبت به N عدد کوچکی است و ما می‌توانیم توزیع فوق هندسی را با استفاده از توزیع دو جمله‌ای تخمین بزنیم:

$$n=6 \qquad p=\frac{70}{200}=0/35 \qquad p(X=3)=\binom{6}{3}.(0/35)^3(0/65)^{6-3}=0/24$$

توجه: متغیر فوق هندسی شباهت زیادی با متغیر دو جمله‌ای دارد با این تفاوت که متغیر دو جمله‌ای تعداد موفقیت‌ها در نمونه n تایی با جایگذاری را می‌شمارد ولی در توزیع فوق هندسی تعداد موفقیتها در نمونه‌گیری بدون جایگذاری شمرده می‌شود.
در توزیع دو جمله‌ای با تکرار مستقل یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت ثابت p سر و کار داریم در حالیکه در توزیع فوق هندسی با تکرار یک آزمایش برنولی با احتمال موفقیت $p=\frac{M}{N}$ سر و کار داریم که بطور مستقل از هم تکرار نمی‌شوند. (این موضوع را می‌توان نشان داد؟)

توزیع پواسن: اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد موفقیتها در یک فاصله زمانی یا در یک مکان مشخص باشد آنگاه X را یک متغیر تصادفی پواسن گویند و آن را با نماد $X \sim P(\lambda)$ نشان می‌دهند. مشخصات این توزیع به صورت زیر است:

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} \qquad x=0,1,2,\ldots$$
$$E(X)=Var(X)=\lambda$$
$$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

مثال ۸: *بطورمتوسط در هر صفحه از کتابی ۲ غلط چاپی وجود دارد. اگر صفحه‌ای از کتاب را به تصادف انتخاب کنیم احتمال اینکه هیچ غلط تایپی وجود نداشته باشد چقدر است؟*

۱) $2e^{-1}$ ۲) e^{-1} ۳) e^{-3} ۴) e^{-2}

پاسخ: گزینه «۴»، متغیر تصادفی پواسن است.

$$X\sim P(2) \Rightarrow P(X=x)=\frac{e^{-2}.2^x}{x!} \qquad x=0,1,2,\ldots \Rightarrow P(X=0)=\frac{e^{-2}.2^0}{0!}=e^{-2}$$

مثال ۹: *مشتریهای یک مغازه مطابق یک توزیع پواسن با میانگین ۲۰ نفر در ساعت، برای خرید به مغازه مراجعه می‌کنند. احتمال اینکه مغازه‌دار مجبور شود بیش از ۵ دقیقه برای مراجعه اولین مشتری منتظر بماند، کدام است؟*

۱) $1-e^{-\frac{5}{3}}$ ۲) e^{-20} ۳) $e^{-\frac{5}{3}}$ ۴) $1-e^{-20}$

پاسخ: گزینه «۳»، باید احتمال این که در ۵ دقیقه اول هیچ مشتری وارد نشود را محاسبه کنیم:

$$P(X=0)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!}=e^{-20\times\frac{1}{12}}=e^{-\frac{5}{3}}$$

مثال ۱۰: *اگر توزیع تعداد اتومبیل‌های عبوری از یک خیابان پواسون با $\lambda=30$ (در ساعت) باشد و زمان گذشتن شخصی از خیابان ۱ دقیقه باشد، احتمال این رابیابید که هیچ اتومبیلی به این شخص نزند. (فرض کنید که اگر در زمان عبور شخص، اتومبیلی از خیابان گذشت، حتماً با شخص تصادف می‌کند!)*

۱) e^{-30} ۲) $e^{-\frac{1}{2}}$ ۳) e^{-1} ۴) $1-e^{-1}$

پاسخ: گزینه «۲»، فاصله زمانی بین عبور دو اتومبیل توزیع نمایی با تابع چگالی $30e^{-30x}$ دارد. برای این که شخص تصادف نکند، باید از هنگامی که شخص به خیابان وارد می‌شود تا هنگامی که از خیابان خارج می‌شود هیچ اتومبیلی از خیابان نگذرد. (از خاصیت بی‌حافظگی هم استفاده می‌شود)

$$P(X>\frac{1}{60})=e^{-30\times\frac{1}{60}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

مثال ۱۱: *تعداد ورودیهای یک سیستم در روز (X) دارای توزیع پواسون است. به طوری که $P(X=0)=P(X=1)$. احتمال اینکه در دو روز آینده یک ورودی داشته باشیم چیست؟ ($e\approx 2/7$)*

۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۴۰ ۴) ۰/۸۰

پاسخ: گزینه «۲»

$$P(X=0)=P(X=1)\Rightarrow\frac{\lambda^0e^{-\lambda}}{0!}=\frac{\lambda^1e^{-\lambda}}{1!}\Rightarrow\lambda=1$$

حال یک توزیع پواسن با پارامتر $\lambda=2$ در نظر می‌گیریم:

$$P(X=2)=\frac{1^2e^{-1}}{2!}=\frac{2}{e^2}=0/18$$

تقریب توزیع دوجمله‌ای بوسیله توزیع پواسون:

اگر در آزمایش دوجمله‌ای n بزرگ و P بسیار کوچک (نزدیک به صفر) باشد، آنگاه می‌توان توزیع دوجمله‌ای را با توزیع پواسن تقریب زد، به طوریکه $\lambda=np$. یعنی:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}.p^x.(1-p)^{n-x}=\frac{e^{-np}.(n.p)^x}{x!}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad ; \lambda=n.p$$

واگر در شرایط بالا، P بسیار بزرگ (نزدیک به یک) باشد، آنگاه توزیع پواسن مطرح شده با پارامتر $\lambda=n.p$ خواهد بود.

مثال ۱۲: *هر یک از ۵۰۰ قطعه انتخاب شده مستقل از یکدیگر با احتمال ۰/۰۰۱ دارای عیب خاصی هستند. این عیب را می‌توان با استفاده از کنترل کیفیت آماری تشخیص داد احتمال اینکه از این ۵۰۰ نمونه حداقل یک قطعه دارای عیب باشد چقدر است؟*

۱) ۰/۳۹ ۲) ۰/۳۵ ۳) $e^{-0/5}$ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lambda=n.p=500\times\frac{1}{1000}=0/5$$
$$p(X\geq1)=1-p(X=0)=1-e^{-\lambda}=1-e^{-0/5}=0/3935$$

توزیع دو جمله‌ای منفی:

اگر متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود:

X: تعداد آزمایشات تا رسیدن به r امین موفقیت

با یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی سر و کار داریم مشخصات این توزیع به صورت زیر می‌باشد:

$$P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^rq^{x-r} \qquad x=r,r+1,\ldots$$

$$E(X)=\frac{r}{p} \qquad M_X(t)=\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r \quad ; \quad t<-Lnq$$
$$Var(X)=\frac{rq}{p^2}$$

در بعضی مواقع ترجیح داده می‌شود که به جای تعداد آزمایشها تا رسیدن به r امین موفقیت متغیر جدید تعداد شکستها تا رسیدن به r امین موفقیت جایگزین شود.

$y = X - r$ تعداد شکستها تا رسیدن به r امین موفقیت

$$f_Y(y) = p(Y = y) = \binom{r+y-1}{y} . p^r . q^y$$

مثال ۱۳: احتمال گل شدن پرتاب یک بسکتبالیست ۰/۸ است. احتمال اینکه او در پنجمین پرتاب به دومین گل برسد چقدر است؟

۱) ۰/۳۲ ۲) ۰/۸ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۶۴

پاسخ: گزینه «۲»

$$P(X=5) = \binom{5-1}{2-1} . (0/8)^2 (0/2)^{5-2} = \binom{4}{1} . (0/64)(0/008) = 0/020$$

مثال ۱۴: اگر در انجام یکسری آزمایش برنولی احتمال موفقیت $\frac{1}{4}$ باشد، امید ریاضی تعداد شکستها قبل از رسیدن به چهارمین موفقیت کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه «۴»

y : تعداد شکستها تا رسیدن به چهارمین موفقیت

$$Y = X - 4 \Rightarrow E(Y) = E(X-4) = \frac{4}{\frac{1}{4}} - 4 = 12 \qquad X \sim Nb(4, \tfrac{1}{4})$$

توزیع هندسی:

اگر در توزیع دو جمله‌ای منفی $r = 1$ باشد آنگاه با یک متغیر تصادفی هندسی سر و کار داریم:

X: تعداد آزمایشات مستقل برنولی تا رسیدن به اولین موفقیت

متغیر هندسی را با نماد $X \sim Ge(p)$ نشان می‌دهند. مشخصات آن به صورت زیر می‌باشد:

$$f_X(x) = P(X = x) = pq^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$P(X \le r) = 1 - q^r$$

نکته ۱: مانند توزیع دو جمله‌ای منفی

$Y = X - 1$ تعداد شکستها تا رسیدن به اولین موفقیت

$$f_Y(y) = p(Y = y) = pq^y \qquad y = 0, 1, 2, \ldots$$

نکته ۲: اگر در توزیع دوجمله‌ای منفی $r = 1$ آنگاه به توزیع هندسی می‌رسیم.

مثال ۱۵: اگر X یک متغیر تصادفی هندسی باشد مقدار احتمال $P(X = a + b \mid X > a)$ کدام است؟

۱) $P(X = b)$ ۲) $\frac{P(X = a+b)}{P(X = a)}$ ۳) $P(X = a + b)$ ۴) $P(X = a)$

پاسخ: گزینه «۱» با توجه به رابطه احتمال شرطی داریم:

$$P(X = a + b \mid X > a) = \frac{p(X = a+b, X > a)}{p(X > a)} = \frac{p(1-p)^{a+b-1}}{(1-p)^a} = p(1-p)^{b-1} = P(X = b)$$

نکته ۳: خاصیت مطرح شده در مثال بالا به خاصیت عدم حافظه معروف است که تنها توزیع هندسی در بین توزیعهای گسسته آن را دارا می‌باشد.

مثال ۱۶: اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل بوده و هر دو دارای توزیع هندسی با پارامتر p، $0 < p < 1$ باشند آنگاه احتمال $X = Y$ کدام است؟

۱) $\frac{p}{2-p}$ ۲) $\frac{1}{2-p}$ ۳) $\frac{p}{1-p}$ ۴) $\frac{1}{1-p}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$P(X = Y) = P(X = Y = 1) + P(X = Y = 2) + \cdots = P(X = 1).P(Y = 1) + P(X = 2).P(Y = 2) + \cdots$$

$$= p(1-p)^0 p(1-p)^0 + p(1-p)p(1-p) + \cdots = p^2 + p^2(1-p)^2 + \cdots = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

توزیع یکنواخت گسسته:

اگر متغیر تصادفی X تمام مقادیرش را با احتمالات یکسان اختیار کند با توزیع یکنواخت گسسته سر و کار داریم آن را با نماد $X \sim DU(k)$ نشان می‌دهند. مشخصات آن به صورت زیر می‌باشد:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{k} \qquad x = x_1, x_2, \cdots x_k$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$Var(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2$$

مثال ۱۷: یک صفحه هدف زنی دایره‌ای شکل به ۱۵ قطاع مساوی تقسیم شده و با شماره‌های ۱ تا ۱۵ جدا گردیده است. اگر X برابر با عددی باشد که تیر در قطاع مربوط به آن اصابت می‌کند، میانگین X کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۸۰ ۴) ۴۵

پاسخ:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{15} \qquad x = 1, 2, \ldots, 15$$

$$E(X) = \mu = \frac{1}{15} \cdot \sum_{x=1}^{15} x = \frac{15(15+1)}{2} = 120 \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

بررسی چند توزیع پیوسته:

توزیع یکنواخت پیوسته:

اگر X دارای تابع چگالی احتمال بصورت زیر باشد گوئیم X دارای توزیع یکنواخت پیوسته در بازه (a,b) است و آن را با نماد $X \sim U(a,b)$ نشان می‌دهند.

مشخصات این توزیع به صورت زیر می‌باشد:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases} \qquad F_X(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad Var(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M_X(t)=\begin{cases}\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} & t\neq 0\\ 0 & t=0\end{cases}$$

***مثال۱۸:** فرض کنید a عددی تصادفی از فاصله $[4,-4]$ باشد. احتمال اینکه معادله درجه دوم $x^2+ax+1=0$ دارای دو ریشه حقیقی داشته باشد کدام است؟*

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$f(a)=\frac{1}{8} \qquad -4<a<4$$

$$P(a^2-4\ge 0)=P(a^2\ge 4)=P(|a|\ge 2)=P(a>2 \text{ یا } a<-2)$$

$$=1-P(-2<a<2)=1-\int_{-2}^{2}\frac{1}{8}dx=1-\frac{4}{8}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

***مثال۱۹:** اتوبوسهای مسافربری از ساعت ۷ صبح با فواصل ۱۵ دقیقه‌ای به ایستگاه مشخصی وارد می‌شوند. یعنی اینکه، آنها در ساعات ۷، ۷:۱۵، ۷:۳۰، ۷:۴۵ و ... به ایستگاه می‌رسند. اگر زمان رسیدن یک مسافر به ایستگاه مورد نظر یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین ۷ و ۷:۳۰ باشد، احتمال اینکه:*

الف ـ مسافر کمتر از ۵ دقیقه منتظر اتوبوس باشد چقدر است؟

ب ـ مسافر بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس باشد چقدر است؟

☑ **پاسخ:**

الف: X یک متغیر تصادفی روی فاصله $(30\,,\,0)$ است، نتیجه می‌شود که مسافر کمتر از ۵ دقیقه منتظر خواهد شد اگر و فقط اگر او بین ۷:۱۰ و ۷:۱۵ یا بین ۷:۲۵ و ۷:۳۰ به ایستگاه برسد.

$$p(10<X<15)+p(25<X<30)=\int_{10}^{15}\frac{1}{30}dx+\int_{25}^{30}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

ب: او بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر خواهد شد اگر او بین ۷ و ۷:۰۵ یا بین ۷:۱۵ و ۷:۲۰ به ایستگاه برسد.

$$p(0<X<5)+p(15<X<20)=\int_{0}^{5}\frac{1}{30}dx+\int_{15}^{20}\frac{1}{30}dx=\frac{1}{3}$$

توزیع گاما:

این توزیع از نام تابع گاما گرفته شده است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-y}y^{\alpha-1}dy \qquad \text{(تابع گاما)}$$

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$\Gamma(n)=(n-1)! \quad (n\in N)$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\approx\sqrt{\pi}$$

متغیر تصادفی گاما بصورت زیر تعریف می‌شود:

X : مدت زمان لازم جهت اتفاق افتادن α پیشامد

آن را با نماد $X\sim\Gamma(\alpha,\frac{1}{\beta})$ نشان می‌دهند که در اینجا $\frac{1}{\beta}$ میانگین تعداد اتفاقات براساس یک فرآیند پواسن می‌باشد. مشخصات این توزیع به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}.x^{\alpha-1}.e^{\frac{-x}{\beta}} \qquad x>0\ ;\ \alpha,\beta>0$$

$$E(X)=\alpha\beta$$

$$Var(X)=\alpha\beta^2$$

$$M_X(t)=\frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}\ ;t<\frac{1}{\beta}$$

***مثال ۲۰:** شماره‌گیریهای مشترکین در یک مرکز تلفن براساس یک فرآیند پواسون با آهنگ ۵ تلفن در دقیقه صورت می‌گیرد. احتمال اینکه حداکثر یک دقیقه برای دو شماره‌گیری صرف شود کدام است؟*

۱) ۰/۵۸ ۲) ۰/۹۶ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\beta=\frac{1}{5}=0/2 \quad , \quad \alpha=2$$

$$P(X\le 1)=\int_0^1\frac{1}{\Gamma(2)(0/2)^2}.x^{2-1}.e^{-5x}dx=25\int_0^1 x.e^{-5x}dx=25(-\frac{x}{5}e^{-5x})\Big|_0^1+\frac{1}{5}\int_0^5 e^{-5x}dx=1-6e^{-5}=0/96$$

توزیع نمایی: متغیر تصادفی X بصورت زیر تعریف می‌شود:

X : زمان انتظار بین دو پیشامد متوالی در فرآیند پواسون

یا

X : زمان انتظار تا مشاهده اولین پیشامد در فرآیند پواسن

آن را با نماد $X\sim Exp(\frac{1}{\beta})$ نشان می‌دهند و مشخصات این توزیع به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} \qquad x>0$$

$E(X)=\beta$

$Var(X)=\beta^2$

$M_X(t)=\frac{1}{1-\beta t} \qquad t<\frac{1}{\beta}$

نکته۴: اگر در توزیع گاما $\alpha=1$ آنگاه به توزیع نمایی می‌رسیم.

مثال ۲۱: ***در یک ایستگاه تاکسی مدت زمان بین ورودی‌های متوالی تاکسی‌ها یک توزیع نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه دارد. اگر فردی تا به حال یک ساعت در انتظار رسیدن یک تاکسی بوده احتمال اینکه در ۱۰ دقیقه آینده یک تاکسی برسد چقدر است؟***

۱) e^{-1} ۲) e^{-7} ۳) $1-e^{-7}$ ۴) $1-e^{-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x)=\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} \qquad x>0$$

$$P(X<70\mid X>60)=\frac{P(60<x<70)}{P(x>60)}=\frac{\int_{60}^{70}\frac{1}{10}e^{\frac{-x}{10}}dx}{\int_{60}^{\infty}\frac{1}{10}e^{\frac{-x}{10}}dx}=\frac{e^{-6}-e^{-7}}{e^{-6}}=1-e^{-1}$$

مثال ۲۲: ***بطور متوسط ۵۰ تصادف رانندگی در یک ساعت رخ می‌دهد. احتمال اینکه حداقل ۲ دقیقه طول بکشد تا تصادف بعدی براساس لحظه معینی رخ دهد کدام است؟***

۱) $e^{-\frac{5}{6}}$ ۲) $1-e^{-\frac{5}{6}}$ ۳) $1-e^{-\frac{5}{3}}$ ۴) $e^{-\frac{5}{3}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

دقیقه	تصادف
۶۰	۵۰
۱	$\lambda=\frac{5}{6} \Rightarrow \beta=\frac{6}{5}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}=\begin{cases}\frac{5}{6}e^{-\frac{5x}{6}} & x>0\\ 0 & o.w\end{cases}$$

$$P(X\geq 2)=\int_{2}^{+\infty}\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{6}x}dx=-e^{-\frac{5}{6}x}\Big|_2^{\infty}=e^{-\frac{5}{3}}$$

مثال ۲۳: ***اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی و تابع چگالی $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}\ x>0$ باشد، آنگاه $E(X\mid X>1)$ برابر است با:***

۱) $1-\frac{1}{\lambda}$ ۲) $\frac{2}{\lambda}$ ۳) $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ ۴) $\frac{1}{\lambda}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$E(X\mid X>1)=\frac{\int_1^{\infty}x f_X(x)\,dx}{\int_1^{\infty}f_X(x)\,dx}=\frac{\int_1^{\infty}\lambda x e^{-\lambda x}dx}{\int_1^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx}=\frac{\left[xe^{-\lambda x}-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_1^{\infty}}{e^{-\lambda}}=\frac{e^{-\lambda}+\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}}{e^{-\lambda}}=\frac{\lambda+1}{\lambda}$$

مثال ۲۴: ***طول عمر هر دستگاه کامپیوتر دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۷۰۰ ساعت می‌باشد. اگر آزمایشگاهی ۲۰ دستگاه کامپیوتر داشته باشد، احتمال اینکه حداقل دو دستگاه از آنها قبل از ۱۷۰۰ ساعت خراب شوند کدام است؟***

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۹۹ ۳) ۰/۱۷ ۴) ۰/۳۹

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» Y: تعداد دستگاههای کامپیوتر در بین ۲۰ دستگاه که دارای طول عمر کمتر از ۱۷۰۰ $\Rightarrow Y\sim B(20,p)$

X: طول عمر دستگاه برحسب ساعت $\Rightarrow X\sim exp(1700)$

$$p=P(X<1700)=\int_0^{1700}\frac{1}{1700}e^{\frac{-x}{1700}}dx=1-e^{-1}=0/6321$$

$$P(Y\geq 2)=1-P(Y<2)=1-\left\{\binom{20}{0}(0/6321)^0(0/3679)^{20}+\binom{20}{1}(0/6321)^1(0/3679)^{19}\right\}=0/999$$

نکته۵: برای متغیر تصادفی X که از توزیع نمایی برخوردار است به ازای مقادیر $S,t\geq 0$ داریم:

$P(X>S+t\mid x>t)=P(X>s) \quad ; s,t\geq 0$ (خاصیت عدم حافظه)

دقت شود که در بین توزیعهای پیوسته، تنها توزیع نمایی دارای چنین خاصیتی است.

مثال ۲۵: ***برای دریافت خدمت، به اداره پستی که دو کارمند دارد وارد می‌شوید و در می‌یابید که هر دو کارمند مشغول خدمت‌دهی به مشتری هستند اگر شما تنها مشتری در حال انتظار باشید و مدت خدمت دهی هر یک از کارمندان توزیع نمایی با پارامتر β داشته باشد و بدانید که خدمت دهی به شما هنگامی آغاز می‌شود که خدمت دهی به یکی از دو مشتری دیگر به پایان برسد، احتمال اینکه در بین سه نفر فوق شما آخرین نفری باشید که اداره پست را پس از خدمت‌گیری ترک می‌کند چقدر است؟***

☑ **پاسخ:** زمانی که یک کارمند صرف مشتری می‌کند دارای توزیع نمایی است. زمانی را در نظر می‌گیریم که شما اولین کارمند آزاد را پیدا می‌کنید در این لحظه یکی از دو نفر اداره را ترک کرده است و دیگری هنوز در اداره است. با توجه به بدون حافظه بودن توزیع نمایی، نتیجه می‌شود که مدت زمان اضافی که شخص دیگر باید در اداره صرف کند دارای توزیع نمایی با پارامتر β است. و این به این معنی است که خدمت برای این شخص از این لحظه شروع می‌شود پس احتمال اینکه شخص باقیمانده قبل از شما کارش تمام شود برابر با $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

مثال ۲۶: ***یک جعبه محتوی ۲۴ شیشه پرنوشابه در فروشگاهی موجود است. مدت زمان بین تقاضاهای متوالی برای نوشابه در این فروشگاه توزیع نمایی با میانگین ۱۲ دقیقه دارد. فروشگاه از ۷ صبح تا ۱۰ شب باز است. اگر هیچ شیشه نوشابه‌ای تا ۱۲:۰۰ ظهر به فروش نرفته باشد احتمال اینکه تا ساعت ۱۰ شب نیز نوشابه‌ای به فروش نرود چیست؟***

۱) e^{-120} ۲) e^{-50} ۳) $1-e^{-120}$ ۴) $1-e^{-25}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»، از خاصیت عدم حافظه توزیع نمایی استفاده کرده و احتمال مربوطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\beta = \frac{12}{60} = 0/2$$

$$P(X > 22-7 \mid X > 12-7) = P(X > 15 \mid X > 5) = P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{0/2} e^{\frac{-x}{0/2}} dx = e^{-50}$$

رابطه توزیع نمایی و توزیع پواسون:

در یک آزمایش پواسون با پارامتر λ ، که λ میانگین تعداد اتفاقاتی در یک واحد زمانی است قرار می‌دهیم:

$X : [0, t]$ تعداد اتفاقات در فاصله زمانی

$Y :$ زمان تا رسیدن به اولین اتفاق

$$\Rightarrow X \sim P(\lambda t)$$

$$P(Y > t) = P(X = 0) = e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad F_Y(t) = P(Y \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t > 0 \quad \Rightarrow \quad Y \sim \exp(\lambda)$$

توزیع مربع کای:

در توزیع گاما اگر $\alpha = \frac{v}{2}$ ، $\beta = 2$ چگالی مربع کای تعریف می‌شود. متغیر مربع کای را با نماد $X \sim \chi^2(v)$ نشان می‌دهند.

مشخصات این توزیع به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} . x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$E(X) = v$$

$$Var(X) = 2v$$

$$M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha} = (1-2t)^{-\frac{v}{2}} \qquad t < \frac{1}{2}$$

توزیع بتا:

متغیر X دارای توزیع بتا می‌باشد اگر مشخصات آن به صورت زیر باشد:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)} . x^{\alpha-1} . (1-x)^{\beta-1} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad \alpha, \beta > 0$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

نکته۶: حالت خاص $\beta = 1$ ، یعنی $\beta(\alpha, 1)$ به توزیع توانی معرف است و حالت خاص $\alpha = \beta = 1$. یعنی $\beta(1,1)$ ، همان توزیع $U(0,1)$ (یکنواخت پیوسته در فاصله صفر و یک) است.

نکته۷: برای یک توزیع بتا با پارامترهای α , β : $E(X^k) = \frac{\pi(\alpha+\beta).\pi(\alpha+k)}{\pi(\alpha).\pi(\alpha+\beta+k)}$

توزیع نرمال:

کاربردی‌ترین توزیع پیوسته در آمار توزیع نرمال است. متغیر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است، هرگاه تابع چگالی احتمال آن بصورت زیر باشد:

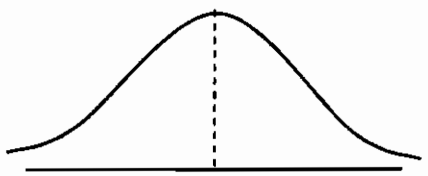
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad -\infty < x < \infty \quad ; \; \mu \in \mathbb{R} , \sigma > 0$$

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

منحنی تابع چگالی احتمال بصورت زنگی شکل است که دارای ویژگیهای زیر است:



μ

۱) منحنی دارای یک نقطه ماکزیمم در نقطه $x = \mu$ است.

۲) منحنی دارای دو نقطه عطف در نقاط $x = \mu \pm \sigma$ است.

۳) منحنی نسبت به خط $x = \mu$ متقارن است یعنی $f(\mu - a) = f(\mu + a)$

۴) محور x ها مجانب افقی تابع است. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

توزیع نرمال استاندارد و طرز محاسبه احتمال در توزیع نرمال:

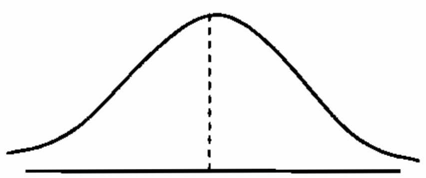
برای محاسبه احتمال در توزیع نرمال باید روی فاصله مورد نظر از تابع چگالی احتمال نرمال انتگرال‌گیری کرد. مقدار انتگرال از طریق تحلیلی بدست نمی‌آید و مقدار آن از راه‌های آنالیز عددی و با استفاده از کامپیوتر قابل محاسبه است. ولی چون به ازای مقادیر مختلف μ و σ^2 تعداد بی‌شماری توزیع نرمال وجود دارد انتگرال فوق را نمی‌توان با کامپیوتر نیز محاسبه کرد. لذا با یک تبدیل خطی هر توزیع نرمال را به توزیع نرمال استاندارد تبدیل کرده و آنگاه با استفاده از جدول احتمالات تجمعی هر متغیر نرمال را محاسبه می‌کنند. پس اگر $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است) آنگاه متغیر تصادفی $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ می‌باشد.

$$P(a \le X \le b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}) = P(Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}) - P(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$= F_Z(\frac{b-\mu}{\sigma}) - F_Z(\frac{a-\mu}{\sigma}) = \phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد را با $\phi(Z)$ نشان می‌دهند.

شکل تابع نرمال استاندارد بصورت زیر است:



0

مثال ۲۷: *اگر $X \sim N(50, 100)$ باشد مقدار $P(45 \le X \le 62)$ کدام است؟*

۱) ۰/۵۷ ۲) ۰/۳۶ ۳) ۰/۵۹ ۴) ۰/۱۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» ابتدا متغیر را استاندارد می‌کنیم سپس از جدول مقادیر احتمال را محاسبه می‌کنیم.

$$P(\frac{45-50}{10} \le Z \le \frac{62-50}{10}) = P(Z \le 1/2) - P(Z \le -0/5) = \phi(1/2) - \phi(-0/5)$$
$$= 0/8849 - [1 - 0/6915] = 0/5764$$

مثال ۲۸: *بردن نمرات دانشجویان بر روی نمودار بدین صورت انجام می‌شود که ابتدا فرض می‌شود نمرات از توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 بدست آمده‌اند، سپس براساس نمرات دانشجویان برآوردی از μ و σ^2 بدست می‌آید و آنگاه نمرات F, D, C, B, A به ترتیب زیر به دانشجویان تخصیص داده می‌شود:*

به دانشجویانی که نمرهٔ آنها بیش از $\mu+\sigma$ باشد نمره A

به دانشجویانی که نمرهٔ آنها بین μ و $\mu+\sigma$ باشد نمره B

به دانشجویانی که نمرهٔ آنها بین $\mu-\sigma$ و μ باشد نمره C

به دانشجویانی که نمرهٔ آنها بین $\mu-2\sigma$ و $\mu-\sigma$ باشد نمره D

و به دانشجویانی که نمره آنها کمتر از $\mu-2\sigma$ باشد نمره F تعلق می‌گیرد.

با روش بالا هر یک از نمرات فوق به چند درصد از دانشجویان کلاس تخصیص داده می‌شود؟

☑ **پاسخ:**

$$A: P(X > \mu+\sigma) = P(Z > \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}) = 1 - \phi(1) = 1 - 0/84 = 0/16$$

$$B: P(\mu < X < \mu+\sigma) = P(\frac{\mu-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}) = \phi(1) - \phi(0) = 0/8413 - 0/5 = 0/3413$$

$$C: P(\mu-\sigma < X < \mu) = P(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu-\mu}{\sigma}) = \phi(0) - \phi(-1) = 0/5 - [1 - 0/8413] = 0/3413$$

$$D: P(\mu-2\sigma < X < \mu-\sigma) = P(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}) = \phi(2) - \phi(1) = 0/9772 - 0/8413 = 0/1359$$

$$F: P(X < \mu-2\sigma) = P(Z < \frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma}) = \phi(-2) = 1 - 0/9772 = 0/0228$$

بنابراین تقریباً ۱۶ درصد از دانشجویان نمره A، ۳۴ درصد نمره B، ۳۴ درصد نمره C و ۱۴ درصد نمره D و سرانجام دو درصد نمره F دریافت خواهند کرد.

مثال ۲۹: *اگر $X \sim N(1,1)$ و $Y \sim N(1,2)$ و ضریب همبستگی X و Y برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد و $\phi(0)$ تابع توزیع نرمال استاندارد باشد $P(X - Y < \sqrt{2})$ برابر است با:*

۱) $\phi(2)$ ۲) $\phi(-2)$ ۳) $\phi(\sqrt{2})$ ۴) $1-\phi(\sqrt{2})$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$k = X - Y \Rightarrow E(k) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow Var(k) = Var(X) + Var(Y) - 2cov(X,Y) = 1 + 2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = 1$$

$$P(k < \sqrt{2}) = P(Z < \frac{\sqrt{2}-0}{1}) = P(Z < \sqrt{2}) = \phi(\sqrt{2})$$

مثال ۳۰: *پهنای قالبهای میله‌های آلومینیومی (برحسب اینچ) دارای توزیع نرمال با $\mu = 0/9000$ و $\sigma = 0/0030$ است.*

اگر حد مجاز تعیین شده برای پهنای قالبها برابر با $0/9000 \pm 0/0050$ باشد. چه درصدی از قالبها معیوب هستند؟

۱) ۰/۹۰۵ ۲) ۹/۵ ۳) ۹۵ ۴) ۰/۰۹۰۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$P(\text{سالم}) = P(0/8950 < X < 0/9050) = P\left(\frac{0/8950 - 0/9}{0/0030} < Z < \frac{0/9050 - 0/9}{0/0030}\right)$$
$$= P(-1/67 < Z < 1/67) = 0/905$$
$$P(\text{معیوب}) = 1 - P(\text{سالم}) = 1 - 0/905 = 0/095 \Rightarrow 9/5\%$$

مثال ۳۱: *فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و هر یک دارای توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ به صورت $X \sim N(0,1)$ و $Y \sim N(2,2)$ باشد. مقدار ثابت C را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $P(X + 2Y \le C) = P(\sqrt{2}X - Y \ge 0/4)$*

۱) -۳/۲ ۲) -۵/۶ ۳) ۰/۴ ۴) ۷/۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» چون X و Y نرمال هستند و هر ترکیب خطی از نرمال‌ها، خود نرمال می‌باشد، لذا $U = X + 2Y$ و $W = \sqrt{2}X - Y$ نیز نرمال هستند، از طرفی

$$E(U) = E(X + 2Y) = E(X) + 2E(Y) = 0 + 4 = 4$$
$$V(U) = V(X + 2Y) = V(X) + 4V(Y) = 1 + 8 = 9$$
$$E(W) = E(\sqrt{2}X - Y) = \sqrt{2}E(X) - E(Y) = 0 - 2 = -2$$
$$V(W) = V(\sqrt{2}X - Y) = 2V(X) + V(Y) = 2 + 2 = 4$$
$$P(X + 2Y \le c) = P(Z \ge \frac{0/4 + 2}{2}) = P(Z \ge 1/2)$$
$$P(Z \le \frac{c-4}{3}) = P(Z \ge 1/2) = P(Z \le -1/2) \Rightarrow \frac{c-4}{3} = -1/2 \Rightarrow c = 0/4$$

توجه: $\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y}$

نکته۸: در پاره‌ای از مواقع می‌توان توزیع دو جمله‌ای را با توزیع نرمال تخمین زد اگر $np > 5$ باشد می‌توان از تخمین نرمال در دوجمله‌ای استفاده کرد. (هر اندازه n بزرگتر و p به $\frac{1}{2}$ نزدیکتر باشد تخمین بهتر و دقیقتر خواهد بود.)

توجه شود که چون توزیع دو جمله‌ای یک توزیع گسسته است زمانیکه برای تخمین از توزیع پیوسته نرمال استفاده می‌کنیم مقدار $\frac{1}{2}$ را به مقدار داده شده کم و زیاد می‌کنیم به این عمل تصحیح پیوستگی گویند.

$$P(X = K) = P(K - \frac{1}{2} < X < K + \frac{1}{2})$$

$$P(X \le K) = P(X < K + \frac{1}{2})$$

$$P(X \ge K) = P(X > K - \frac{1}{2})$$

مثال ۳۲: اگر سکه سالمی ۱۰۰۰۰ بار پرتاب کنیم احتمال اینکه حداقل ۵۵۰۰ شیر بیاید برابر است با:

۱) تقریباً برابر با ۱ است. ۲) تقریباً صفر است. ۳) تقریباً برابر با $\frac{1}{2}$ است. ۴) تقریباً $\frac{55}{100}$ است.

پاسخ: گزینه «۲» از تقریب نرمال استفاده می‌کنیم:

$$P(X \geq 5500) = P(Z \geq \frac{5500-5000}{\sqrt{2500}}) = P(Z > 10)$$

$$\mu = n.p = 10000 \times \frac{1}{2} = 5000$$

$$\sigma^2 = n.p.q = 10000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2500$$

نکته ۹: قضیه حد مرکزی: اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان با میانگین μ و واریانس $\sigma^2 < \infty$ باشد آنگاه متغیر تصادفی $Z = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ زمانیکه $n \to \infty$ دارای توزیع نرمال استاندارد است.

نکته ۱۰: اگر Z نرمال استاندارد باشد.

$$E(Z^{2n-1}) = 0$$

$$E(Z^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

نکته ۱۱: تمام گشتاورهای مرکزی مرتبه فرد توزیعهای متقارن حول صفر، برابر صفر است.

توزیع t:

اگر متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد و متغیر تصادفی V دارای توزیع توان دوم کای با n درجه آزادی و همچنین Z و V مستقل از هم باشند متغیر $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ دارای توزیع t با n درجه آزادی است. مشخصات این توزیع به صورت زیر می‌باشد:

$$E(T) = 0$$

$$Var(T) = \frac{n}{n-2} \qquad n > 2$$

نکته ۱۲: $t_{1-\alpha} = -t_\alpha$

توجه: اگر $n \geq 30$ توزیع t به توزیع نرمال استاندارد نزدیک می‌شود.

توزیع F: اگر U و V دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع کای دو با درجات آزادی به ترتیب n_1 و n_2 باشند، آنگاه توزیع متغیر تصادفی $F = \frac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}}$ دارای توزیعی به نام f با درجه آزادی n_1 و n_2 می‌باشد. مشخصات این توزیع به صورت زیر می‌باشد:

$$E(F) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \qquad n_2 > 2$$

$$Var(F) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 4)(n_2 - 2)^2} \qquad n_2 > 4$$

$$f_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{f_\alpha(n_2, n_1)}$$

توزیع نرمال دو متغیره:

این توزیع تعمیمی از توزیع نرمال یک متغیره است که شامل ۲ متغیر تصادفی نرمال است. تابع چگالی احتمال آن بصورت زیر است.

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{q}{2}} \qquad \begin{array}{l} -\infty < x, y < \infty \\ -\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty \quad -1 < \rho < 1 \\ \sigma_1, \sigma_2 > 0 \end{array}$$

$$q = \frac{1}{1-\rho^2}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]$$

در اینجا مقادیر μ_1 و μ_2 و σ_1^2 و σ_2^2 و ρ پارامترهای توزیع نرمال دو متغیره می‌باشند.

خواص توزیع نرمال دو متغیره:

۱) متغیر X دارای توزیع حاشیه‌ای نرمال است. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

۲) متغیر Y دارای توزیع حاشیه‌ای نرمال است. $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

۳) ρ ضریب همبستگی بین X و Y است.

۴) توزیع شرطی $X|Y$ دارای توزیع نرمال است. $X|Y = y \sim N(\mu_1 + \rho(\frac{\sigma_1}{\sigma_2})(y - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2))$

۵) توزیع شرطی $Y|X$ دارای توزیع نرمال است. $Y|X = x \sim N(\mu_2 + \rho(\frac{\sigma_2}{\sigma_1})(x - \mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2))$

۶) در حالت کلی اگر $Cov(X,Y) = 0$ باشد نمی‌توان بطورکلی نتیجه گرفت که x, y مستقلند ولی در توزیع نرمال دو متغیره این خاصیت برقرار است؛ یعنی اگر $Cov(X,Y) = 0$ باشد آنگاه $f(x,y) = g(x) \times h(y)$ یعنی X و Y مستقلند.

۷) تابع مولد گشتاور این توزیع به صورت $M_{X,Y}(t_1, t_2) = \exp\left\{\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2}{2}\right\}$ می‌باشد.

توزیع تابعهایی از متغیرهای تصادفی

در این بخش به محاسبه توزیع تابعهایی از چند متغیر تصادفی می‌پردازیم. فرض کنید $X_1, X_2, \cdots, X_n$، n متغیر تصادفی با توزیع مشخص باشند. اکنون ما می‌خواهیم توزیع تابعی از این n متغیر را بدست آوریم که آن را به صورت $Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ نمایش می‌دهیم. این تابع می‌تواند به اشکال متفاوت باشد. مثلاً:

$$Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1^2 + X_2^2$$

$$Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) = X_1X_2 + X_3X_4 + \cdots + X_{n-1}X_n$$

در اینجا ۳ روش را برای بدست آوردن توزیع تابعی از متغیر تصادفی معرفی می کنیم.

۱ـ روش تابع توزیع تجمعی ($X_1, X_2, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی پیوسته هستند)

در این روش باید ابتدا تابع توزیع (تجمعی) $Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ را بدست آوریم و سپس از تابع توزیع مشتق گرفته تا تابع چگالی احتمال آن را بدست آوریم.

مثال ۳۳: *فرض کنید تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد در اینصورت تابع چگالی احتمال $Y = X^3$ را بدست آورید.*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا تابع توزیع را بدست می‌آوریم:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^3 \le y) = P(X \le y^{\frac{1}{3}}) = \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} 1\, dx = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow F_Y(y) = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \qquad 0 < y < 1$$

مثال ۳۴: *اگر $X_1, X_2, \cdots X_n$، n متغیر تصادفی مستقل باشند، تابع چگالی آنها را f فرض کنید در اینصورت تابع چگالی احتمال بزرگترین آنها یعنی $Y = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ را بدست آورید.*

پاسخ: طبق تعریف تابع توزیع داریم:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\max(X_1, X_2, \cdots X_n) \le y)$$

وقتیکه بیشترین مقدار $X_1, X_2, \cdots X_n$ از y کوچکتر باشد همه X_i ها از y کمتر است.

$$F_Y(y) = P(X_1 \le y, X_2 \le y, \cdots, X_n \le y)$$

چون X_i ها از یکدیگر مستقلند بنابراین:

$$F_Y(y) = P(X_1 \le y).P(X_2 \le y) \cdots P(X_n \le y) = F_{X_1}(y).F_{X_2}(y) \cdots F_{X_n}(y) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(y) = \left(F_{X_i}(y)\right)^n$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = n f_X(y) \left(F_X(y)\right)^{n-1}$$

مثال ۳۵: *اگر $X_1, X_2, \cdots X_n$، n متغیر تصادفی مستقل باشند، که دارای تابع چگالی احتمال f می‌باشند، تابع چگالی احتمال کوچکترین آنها یعنی $Y = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ را بدست آورید.*

پاسخ:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le y) = 1 - P(\min(X_1, X_2, \cdots, X_n \ge y)$$

وقتیکه کوچکترین مقدار $X_1, X_2, \cdots, X_n$ از y بزرگتر است هر کدام از y بزرگتر است.

$$= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \cdots, X_n > y)$$

با توجه به استقلال X_i ها داریم که :

$$\Rightarrow F_Y(y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) \cdots P(X_n > y) = 1 - (1 - P(X_1 \le y))(1 - P(X_2 \le y)) \cdots (1 - P(X_n \le y))$$

$$= 1 - (1 - F_{X_1}(y))(1 - F_{X_2}(y)) \cdots (1 - F_{X_n}(y)) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(y)) = 1 - (1 - F_{X_i}(y))^n$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = n(1 - F_X(y))^{n-1}.f_X(y)$$

مثال ۳۶: *فرض کنید $X_1, X_2, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با چگالی مشترک زیر باشند تابع چگالی احتمال $Y = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ کدام است؟*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & 1 < x < \infty \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

۱) $f_Y(y) = \begin{cases} 1 - y^n & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۲) $f_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{y^n} & 1 < y < \infty \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۳) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^n} & 1 < y < \infty \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۴» طبق مثال بالا:

$$f_Y(y) = n(1 - F_X(y))^{n-1}.f_X(y)$$

$$F_X(y) = \int_1^y \frac{1}{x^2} dx = \int_1^y x^{-2} dx = -x^{-1} \Big|_1^y = -\frac{1}{y} + 1$$

$$f_Y(y) = n.(1 - 1 + \frac{1}{y})^{n-1}.\frac{1}{y^2} = n.y^{-n+1}.y^{-2} = n.y^{-n-1}$$

مثال ۳۷ : *فرض کنید X متغیری تصادفی با چگالی احتمال به صورت زیر باشد:*

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & -1<x<2\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y=X^2$ کدام است؟

۱) $f_Y(y)=\begin{cases}2y & 0<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۲) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{y}} & 0\le y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۳) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6\sqrt{y}} & 1\le y<4\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۴) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{y}} & 0\le y<1\\ \frac{1}{4\sqrt{y}} & 1\le y<4\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» طبق تعریف تابع توزیع داریم:

$$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y})$$

$$-1\le x\le 1\Rightarrow 0\le y<1\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3\sqrt{y}}$$

$$1\le x\le 2\Rightarrow 1\le y<4\Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3}+0\right)=\frac{1}{6\sqrt{y}}$$

بنابراین:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3\sqrt{y}} & 0\le y<1\\ \frac{1}{6\sqrt{y}} & 1\le y<4\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

مثال ۳۸ : *اگر X یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال روبرو باشد:*

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

تابع چگالی احتمال متغیر $Y=|X|$ کدام است؟

۱) $f_Y(y)=\begin{cases}1 & y\ge 0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۲) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۳) $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\ge 0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۴) هیچکدام

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» طبق تعریف تابع توزیع داریم:

$$Y=|X|\Rightarrow F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)=P(X\le y)-P(X\le -y)=F_X(y)-F_X(-y)$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=f_X(y)+f_X(-y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}1 & y\ge 0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

۲ـ روش تبدیل متغیر:

روش دیگری که بسیار پرکاربردتر نیز می‌باشد، روش تبدیل متغیر است، که در اینجا در دو حالت گسسته و پیوسته این روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف ـ حالت گسسته:

مثال ۳۹ : *اگر متغیر تصادفی X، نشان دهنده تعداد شیرهایی باشد که در چهار پرتاب یک سکه سالم بدست می‌آیند. توزیع احتمال $Y=(X-2)^2$ را بدست آورید.*

x	۰	۱	۲	۳	۴
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

☑ **پاسخ:** احتمالات متغیر جدید Y را در نقاط مختلف بدست می‌آوریم، که با توجه به نقاط تعریف شده متغیر X متغیر جدید Y می‌تواند مقادیر ۴,۱,۰ را اختیار کند.

$$P(Y=0)=P((X-2)^2=0)=P(X=2)=\frac{6}{16}$$

$$P(Y=1)=P((X-2)^2=1)=P(X-2=\pm1)=P(X=3)+P(X=1)=\frac{8}{16}$$

$$P(Y=4)=P((X-2)^2=4)=P(X-2=\pm2)=P(X=4)+P(X=0)=\frac{2}{16}$$

y	۰	۱	۴
$P(Y=y)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$

ب ـ حالت پیوسته:

فرض کنید $f_X(x)$ تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X و تابعی که به صورت $Y=g(X)$ داده شده است مشتق‌پذیر و به ازای تمام مقادیر X، $f_X(x)\neq 0$ اکیداً صعودی یا نزولی باشد، در اینصورت برای بدست آوردن چگالی احتمال متغیر جدید Y از رابطه روبرو استفاده می‌کنیم:

$$f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|$$

که در اینجا g^{-1} معکوس g می‌باشد.

مثال ۴۰ : *فرض کنید X دارای چگالی احتمال به صورت روبرو باشد:*

$$f_X(x)=\begin{cases}2x.e^{-x^2} & 0<x<\infty\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

چگالی $Y=X^2$ را بدست آورید.

۱) e^{-y} ۲) e^{-y^2} ۳) $\frac{1}{\sqrt{y}}$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt{y}}$

پاسخ: گزینه «۱» $Y=X^2$ پس $X=\sqrt{y}$ و $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ بنابراین با توجه به رابطه گفته شده بالا:

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|=2\sqrt{y}.e^{-y}\frac{1}{2\sqrt{y}}=e^{-y}\qquad y>0$$

مثال ۴۱ : *فرض کنید X یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال $f_X(x)=ax^{a-1}$; $0\le x\le 1$ که a ثابت و مثبت است. توزیع متغیر تصادفی $Y=-LnX$ کدام است؟*

۱) $f_Y(y)=\frac{1}{a}e^{\frac{1}{a}.y}$ $y>0$ ۲) $f_Y(y)=a.e^{-ay}$ $y>0$

۳) $f_Y(y)=a^2.e^{-a^2.y}$ $y>0$ ۴) $f_Y(y)=e^{-Lna}$ $y>0$

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا معکوس تابع $Y=g(X)$ را بدست می‌آوریم:

$$Y=-LnX\Rightarrow X=e^{-y}=g^{-1}(y)\Rightarrow f_Y(y)=f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d}{dy}.g^{-1}(y)\right|=e^{-y}.a.e^{-y(a-1)}=a.e^{-ay}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=a.e^{-ay}\qquad y>0$$

مثال ۴۲: *فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال*

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{B(a,b)}.\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} & 0<x<\infty,\quad a,b>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

توزیع $Y=\frac{1}{1+X}$ کدام است؟

۱) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{B(a,b)}.y^{b-1}.(1-y)^{a-1} & 0<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۲) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{B(a,b)}.y^{a-1}.(1-y)^{b-1} & 0<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۳) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{B(a,b)}.y^{a-1} & 0<y<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$

۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۱» $Y=\frac{1}{1+X}$ بنابراین $x=\frac{1-y}{y}$ پس $\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{y^2}$

چون $0<x<\infty$ لذا با توجه به رابطه بین x و y $0<y<1$ بنابراین:

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{1-y}{y}\right).\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{B(a,b)}.y^{b-1}(1-y)^{a-1}\qquad 0<y<1$$

روش تبدیل متغیر در مورد توابعی از بردارهای تصادفی دو بعدی پیوسته:

متغیرهای تصادفی پیوسته X_1 و X_2 با تابع چگالی احتمال توأم مفروض‌اند و $\begin{cases}Y_1=U_1(x_1,x_2)\\ Y_2=U_2(x_1,x_2)\end{cases}$ توابعی یک به یک از آنها هستند که معکوس آنها به صورت $\begin{cases}x_1=W_1(y_1,y_2)\\ x_2=W_2(y_1,y_2)\end{cases}$ می‌باشند در اینصورت داریم: (در اینجا نیز مانند روش قبل می‌باشد ولی در حالت دو بعدی مورد بررسی قرار گرفته است)

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}[W_1(y_1,y_2),W_2(y_1,y_2)]\cdot|J|$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}\end{vmatrix}$$

مثال ۴۳: *اگر X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی از چگالی $f_X(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & o.w\end{cases}$ باشد. توزیع متغیر $Y=\frac{X_1}{X_2}$ را بدست آورید.*

پاسخ: ابتدا متغیر جدیدی مانند $Y'=X_2$ معرفی می‌کنیم.

$$\begin{cases}Y=\frac{X_1}{X_2}\\ Y'=X_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=YY'\\ X_2=Y'\end{cases}\Rightarrow J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial y'}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial x_2}{\partial y'}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y' & y\\ 0 & 1\end{vmatrix}=y'$$

$$\Rightarrow f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=f_{X_1}(x_1).f_{X_2}(x_2)=2x_1.2x_2=4x_1x_2$$

$$\Rightarrow f_{Y,Y'}(y_1,y_2)=f_{X_1,X_2}(yy',y').|J|=4yy'^3\Rightarrow f_Y(y)=\int f_{Y,Y'}(y,y')dy'$$

اما به حدود y' دقت کنید:

$$0<y'<1\quad\Rightarrow\quad 0<y'<\min\left(1,\frac{1}{y}\right)$$

$$0<yy'<1\quad\Rightarrow\quad 0<y'<\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^1 4yy'^3\,dy'=4y\times\frac{y'^4}{4}\Big|_0^1=y & 0<y<1\\ \int_0^{\frac{1}{y}} 4yy'^3\,dy'=4y\times\frac{y'^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{y}}=\frac{1}{y^3} & 1<y<\infty\end{cases}$$

مثال ۴۴: *اگر X_1 و X_2 دو نمونه تصادفی از توزیع $U(0,\theta)$ باشند توزیع $Y=X_1+X_2$ را بدست آورید.*

پاسخ: متغیر جدیدی مانند $Y'=X_1$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}Y=X_1+X_2\\ Y'=X_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=Y'\\ X_2=Y-Y'\end{cases}\Rightarrow J=\begin{vmatrix}\frac{\partial X_1}{\partial Y} & \frac{\partial X_1}{\partial Y'}\\ \frac{\partial X_2}{\partial Y} & \frac{\partial X_2}{\partial Y'}\end{vmatrix}=1$$

از طرفی: $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^2} & 0<x_1,x_2<\theta\\ 0 & o.w\end{cases}$

$$f_{Y,Y'}(y,y')=f_{X_1,X_2}(y',y-y').|J|=\frac{1}{\theta^2}$$

$$f_Y(y)=\int f_{Y,Y'}(y,y')\,dy'$$

$$\begin{matrix}0<y'<\theta\\ 0<y-y'<\theta\end{matrix}\Rightarrow -\theta<y'-y<0\Rightarrow y-\theta<y'<y\Rightarrow \max\{y-\theta,0\}<y'<\min\{y,\theta\}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y \frac{1}{\theta^2}dy'=\frac{y}{\theta^2} & 0\le y<\theta\\ \displaystyle\int_{y-\theta}^{\theta}\frac{1}{\theta^2}dy'=\frac{2\theta-y}{\theta^2} & \theta\le y<2\theta\\ 0 & o.w\end{cases}$$

نکته۱۳: بطور کلی اگر متغیرهای X و Y دارای توزیع احتمال توأم پیوسته با چگالی $f_{X,Y}(x,y)$ باشند.

$$1)\ Z=X+Y\ \Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,y}(x,z-x)\,dx$$

$$2)\ V=X-Y\ \Rightarrow f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,y}(v+y,y)\,dy$$

$$3)\ P=X.Y\ \Rightarrow f_P(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}.f_{X,y}(\frac{p}{y},y)\,dy$$

$$4)\ T=\frac{X}{Y}\ \Rightarrow f_T(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,y}(ty,y)\,dy$$

۳ـ روش تابع مولد گشتاور:

در این روش ابتدا تابع مولد گشتاور متغیر جدید $Y=g(X)$ را بدست آورده سپس آن را با مولد گشتاورهای توزیعهای شناخته شده مقایسه می‌کنیم.

***مثال ۴۵:** اگر Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد توزیع Z^2 کدام است؟*

۱) χ^2 ۲) t ۳) Z ۴) نمایی

پاسخ: گزینه «۱»

$$Y=Z^2\Rightarrow M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{tZ^2})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tZ^2}f(Z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tZ^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}Z^2}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-Z^2(1-2t)}{2}}dz$$

انتگرال را در $(1-2t)^{\frac{1}{2}}$ ضرب و به آن تقسیم می‌کنیم.

$$M_Y(t)=\frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1-2t)^{\frac{-1}{2}}}\exp\left(\frac{\frac{-Z^2}{2}}{(1-2t)^{-1}}\right)dz$$

$$\Rightarrow M_Y(t)=\frac{1}{(1-2t)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow Y=Z^2\sim\chi^2(1)$$

***مثال ۴۶:** اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای به ترتیب $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ و $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ باشند، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y=X_1-X_2$ کدام است؟*

۱) نرمال ۲) نمایی ۳) گاما ۴) Z

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا تابع مولد گشتاور متغیر Y را بدست می‌آوریم:

$$M_Y(t)=E(e^{t(X_1-X_2)})=E(e^{tX_1-tX_2})=E(e^{tX_1})E(e^{-tX_2})=M_{X_1}(t).M_{X_2}(-t)=e^{(\mu_1-\mu_2)t+\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

نمونه‌گیری و توزیعهای نمونه‌ای

نمونه تصادفی: مجموعه‌ای از n متغیر مستقل را یک نمونه تصادفی گویند.

پارامتر: هر ویژگی یک جامعه را یک پارامتر می‌گویند.

آماره: هر تابعی از نمونه تصادفی که به پارامترهای مجهول جامعه وابسته نباشد را یک آماره می‌گویند.

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ توابعی از نمونه تصادفی می‌باشند که به پارامترهای مجهول جامعه وابسته نیست.

توجه: اگر میانگین و واریانس جامعه‌ای به ترتیب μ و σ^2 باشند در این صورت:

اگر حجم جامعه نامتناهی باشد $E(\bar{X})=\mu \quad var(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

اگر حجم جامعه متناهی باشد. $E(S^2)=\frac{2\sigma^2}{n-1} \quad var(\bar{X})=\frac{N-n}{N-1}.\frac{\sigma^2}{n}$

$var(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

توزیع میانگین نمونه: اگر از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 یک نمونه تصادفی با حجم n انتخاب کنیم در این صورت $\bar{x}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. بنابراین $Z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است.

قضیه حد مرکزی: یکی از مهمترین نتایج در نظریه احتمال قضیه حد مرکزی است.

اگر x_1 و x_2 و ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان و با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند آنگاه توزیع، $\dfrac{x_1+x_2+...+x_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

وقتی $n\to\infty$ به سمت توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند یعنی برای $-\infty<a<\infty$ داریم:

$$\lim P\left\{\frac{x_1+x_2+...+x_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le a\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}e^{\frac{-x^2}{2}}dx$$

$n\to\infty$

مثال ۴۷ : اگر ۱۰ تاس پرتاب شوند، احتمال تقریبی اینکه مجموع اعداد بین ۳۰ و ۴۰ باشند کدام است؟

۱) ۰/۱۸۴ ۲) ۰/۷۲۲ ۳) ۰/۶۹۲ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه «۳» X_i نشان‌دهندهٔ عدد تاس iام $(i=1,2,...,10)$ باشد چون $E(X_i)=35$ و $Var(X_i)=\frac{35}{12}$ از قضیه حد مرکزی و تصحیح پیوستگی استفاده کردیم و داریم:

$$P(30\le X\le 40)=P(29.5\le X\le 40.5)=P\left(\frac{29.5-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}}\le\frac{X-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}}\le\frac{40.5-35}{\sqrt{\frac{350}{12}}}\right)=2\phi(1.0184)-1=0.692$$

مثال ۴۸: اگر X_i $(i=1,2,...,10)$ متغیرهای تصادفی مستقل، هر کدام با توزیع یکنواخت روی فاصله (۰،۱) باشند $P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i>6\right\}$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲۰ ۳) ۰/۱۶ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه «۳» طبق قضیه حد مرکزی:

$$P\left(\sum_{i=1}^{10}X_i>6\right)=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i-5}{\sqrt{10\times\frac{1}{12}}}>\frac{6-5}{\sqrt{10\times\frac{1}{12}}}\right\}\approx 1-\phi(\sqrt{1.2})\approx 0.16$$

توجه : اگر $\bar{x}$ و S^2 به ترتیب میانگین و واریانس یک نمونه تصادفی به حجم n از یک جامعه نرمال با میانگین (معلوم) μ و واریانس (مجهول) σ^2 باشند آنگاه به جای σ^2 از S^2 که واریانس نمونه است استفاده می‌کنیم آنگاه متغیر جدید $T=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t_{(n-1)}$ بوجود آمد که به آن t استیودنت گویند و اگر n بزرگ باشد $(n>30)$ این توزیع، به توزیع نرمال استاندارد میل خواهد کرد.

توزیع نمونه‌ای اختلاف میانگین‌ها

فرض کنید از دو جامعه، دو نمونه تصادفی با حجم‌های n_1 و n_2 انتخاب کرده و میانگین آنها برابر با $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ می‌باشد.

۱ـ اگر واریانس دو جامعه σ_1^2 و σ_2^2 معلوم باشد و دو جامعه نرمال باشند (در صورت غیر نرمال بودن $(n_1,n_2\ge 30)$ در این صورت:

$$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

۲ـ در حالتیکه واریانس دو جامعه نامعلوم اما مساوی باشند $(\sigma_1=\sigma_2)$

اگر S_1 و S_2 انحراف معیار نمونه‌های اول و دوم باشند در این صورت واریانس مشترک دو نمونه تصادفی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

در این صورت متغیر استاندارد Z به متغیر t استیودنت تبدیل می‌شود.

$$T=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

مثال ۴۹: سازمان حمایت از مصرف کنندگان و تولید کنندگان برای کسب اطلاع از متوسط قیمت فروش کالای x در دو منطقه از شهر تهران، اطلاعات زیر را جمع‌آوری کرده است:

منطقه ۱ : $S_1^2=40.5$; $\bar{x}_1=55$; $n_1=81$

منطقه ۲ : $S_2^2=32.4$; $\bar{x}_2=50$; $n_2=41$

براساس اطلاعات فوق مقدار، آماره آزمون را برای اختلاف واقعی متوسط قیمت کالا در دو منطقه شهر تهران کدام است؟

(با فرض برابری سود واریانس)

۱) ۳/۷۸ ۲) ۳/۲۲ ۳) ۴/۲۴ ۴) ۵/۲۲

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اینکه واریانس جامعه نامعلوم است و واریانسهای نمونه به دست آمده است از توزیع t استفاده می‌کنیم و داریم:

$$S_p^2=\frac{(81-1)40.5+(41-1)32.4}{81+41-2}=37.8$$

$$T=\frac{(55-50)-0}{\sqrt{37.8\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{41}\right)}}=4.24$$

توزیع واریانس نمونه: اگر $x_1,x_2,...,x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال با میانگین نامعلوم μ و واریانس σ^2 باشند در این صورت متغیر زیر دارای توزیع کای دو با درجه آزادی $n-1$ است.

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

مثال ۵۰: دو جامعه نرمال مستقل با میانگین و واریانسهای مجهول را در نظر بگیرید. اگر S_1^2 واریانس یک نمونه تصادفی ۹تایی از جامعه اول و S_2^2 واریانس یک نمونه تصادفی ۹تایی از جامعه دوم که مستقل از اولی باشند با فرض برابری واریانسهای دوجامعه نرمال توزیع متغیر تصادفی $\frac{S_1^2}{S_1^2+S_2^2}$ کدام است؟

۱) Z ۲) χ^2_{16} ۳) t ۴) توزیع معروفی نیست.

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$\frac{(9-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(9-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{16}\ \Rightarrow\ \frac{\frac{(9-1)S_1^2}{\sigma^2}}{\frac{(9-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(9-1)S_2^2}{\sigma^2}}=\frac{\chi^2_8}{\chi^2_{16}}$$

توزیع نسبت واریانسهای نمونه:

اگر S_1^2 و S_2^2 به ترتیب واریانسهای نمونه تصادفی مستقل به اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه های نرمال با واریانسهای σ_1^2 و σ_2^2 باشند آنگاه آماره F دارای توزیع فیشر می‌باشد.

$$\begin{array}{l}\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1)\\[2mm] \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)\end{array} \Rightarrow F=\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}\sim f(n_1-1,n_2-1)$$

مثال ۵۱: *اگر $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ یک نمونه تصادفی ۱۶تایی از یک توزیع نرمال با میانگین μ باشد، در این صورت توزیع احتمال متغیر تصادفی $U=\frac{15(X_{16}-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{15}(X_i-\mu)^2}$ کدام است؟*

۱) T با ۱۵ درجه آزادی ۲) T با ۱۴ درجه آزادی ۳) F با ۱ و ۱۵ درجه آزادی ۴) F با ۱ و ۱۴ درجه آزادی

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» با توجه به توزیع واریانس نمونه و توزیع نسبت واریانسهای نمونه داریم:

$$\frac{(X_{16}-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(1)}$$

$$\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(1)} \to \frac{\sum_{i=1}^{15}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{15} \Rightarrow U=\frac{\frac{\chi^2_{(1)}}{1}}{\frac{\chi^2_{(15)}}{15}}\sim F(1,15)$$

مثال ۵۲: *فرض کنید $X_1,X_2,X_3,X_4 \overset{iid}{\sim} N(0,1)$ توزیع متغیر $Y=\frac{(X_1-X_2)^2}{X_3^2+X_4^2}$ کدام است؟*

۱) $F(1,2)$ ۲) $\chi^2_{(1)}$ ۳) $t(2)$ ۴) $F(2,1)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$X_1,X_2\sim N(0,1)\Rightarrow X_1-X_2\sim N(0,2)\Rightarrow \frac{X_1-X_2}{\sqrt2}\sim N(0,1)\Rightarrow \left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt2}\right)^2\sim\chi^2_{(1)}$$

$$\begin{array}{l}X_3\sim N(0,1)\\ X_4\sim N(0,1)\end{array}\Rightarrow X_3^2+X_4^2\sim\chi^2_{(2)}\Rightarrow Y=\frac{\overbrace{\frac{(X_1-X_2)^2}{2}}^{\sim\chi^2_{(1)}}}{\underbrace{\frac{X_3^2+X_4^2}{2}}_{\sim\chi^2_{(2)}}}\Rightarrow Y\sim F(1,2)$$

مثال ۵۳: *فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل از هم با توزیع نرمال استاندارد باشد توزیع $Y=\frac{X_1+X_2}{|X_1-X_2|}$ با فرض استقلال صورت و مخرج کدام است؟*

۱) $\chi^2_{(1)}$ ۲) $t(1)$ ۳) $F(1,1)$ ۴) Z

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» ابتدا صورت و مخرج را بر عدد $\sqrt2$ تقسیم می‌کنیم:

$$Y=\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt2}}{\left|\frac{X_1-X_2}{\sqrt2}\right|}=\frac{\overbrace{\frac{X_1+X_2}{\sqrt2}}^{\sim N(0,1)}}{\sqrt{\underbrace{\frac{(X_1-X_2)^2}{\sqrt2}}_{\sim\chi^2_{(1)}}}}\Rightarrow Y\sim t(1)$$

توزیع نسبت نمونه‌ای:

اگر جامعه مورد مطالعه، جامعه‌ای دو جمله‌ای باشد، احتمال موفقیت هر عضو p و احتمال عدم موفقیت هر عضو p و احتمال عدم موفقیت $1-p$ می‌باشد. اگر نمونه‌ای به حجم n از این جامعه انتخاب شود که X تعداد موفقیت در نمونه باشد آنگاه $\bar p=\frac{X}{n}$ را نسبت نمونه‌ای می‌نامند که از نمونه‌ای به نمونه دیگر متفاوت است. اکنون اگر حجم نمونه بزرگ باشد توزیع نمونه‌ای $\bar p$ نرمال خواهد بود.

$$Z=\frac{\bar p-p}{\sqrt{\frac{\bar p(1-\bar p)}{n}}}\sim N(0,1)$$

مثال ۵۴: *اگر بدانیم ۲۰% از افراد یک جامعه کم سواد باشند یک نمونه تصادفی به حجم ۱۰۰ را انتخاب می‌کنیم اگر x تعداد افراد بی‌سواد این نمونه باشند احتمال اینکه نسبت افراد بی‌سواد این نمونه کمتر از ۱۰% باشند کدام است؟*

۱) ۰/۰۰۶۲ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۲۵

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$E(X)=np=100\times0/2=20$$

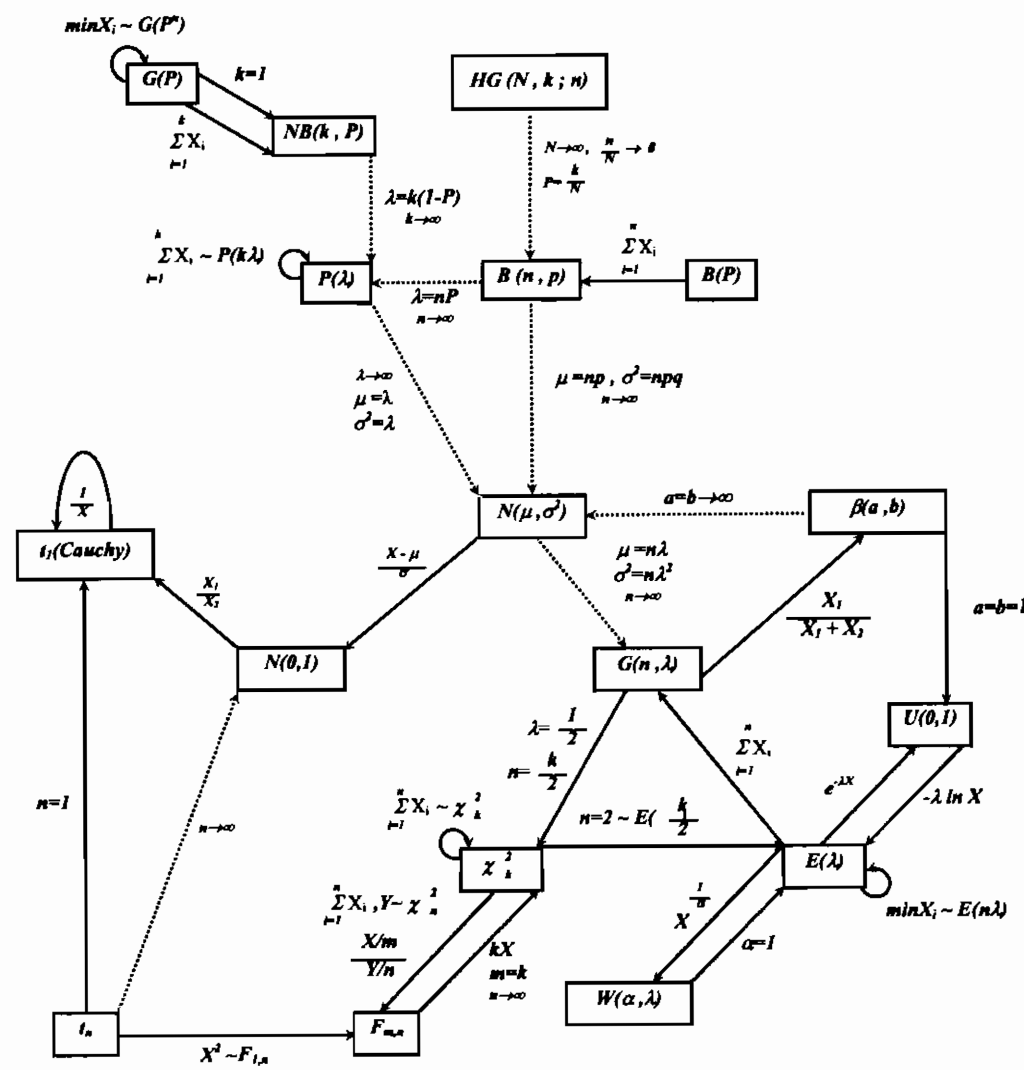
$$Var(X)=np(1-p)=100\times0/2\times0/8=16$$

$$\Rightarrow E(\bar p)=20 \quad , \quad \sigma^2_{\bar p}=0/0016$$

$$p(\bar p<0/1)=p(Z<-0/25)=0/0062$$

جدول روابط بین توزیعها:

(خطوط پر بیانگر تبدیلات و خط‌چین‌ها بیانگر تقریب هستند)



تستهای طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ یک نمونه تصادفی از متغیر تصادفی X با تابع جرم احتمال زیر باشد:

x	-1	0	1
$p(x)$	۰/۲	۰/۵	۰/۳

مقدار احتمال $p\left[\sum_{i=1}^{100} X \le 17\right]$ با استفاده از قضیه حد مرکزی کدامیک است؟ (کامپیوتر- سراسری ۷۸)

$\left[\phi(x) = p[z \le x],\ z \sim N(0,1)\right]$

۱) $\phi(-1/6)$ ۲) $\phi(1)$ ۳) $\phi(0/1)$ ۴) $\phi(0/35)$

۲ـ نمره یک درس ۳ واحدی دارای توزیع نرمال با معدل ۱۲ وانحراف معیار ۲ نمره می‌باشد. نمرهٔ یک درس ۲ واحدی دارای توزیع نرمال با معدل ۱۷ و انحراف معیار ۴ نمره می‌باشد(نمره‌های دو درس مستقل از هم فرض می‌شوند). اگر ۵ دانشجو این ۲ درس را در ترم تابستان اخذ کرده باشند، احتمال آنکه حداقل ۲ نفر از این ۵ نفر معدل بیشتر از ۱۴ نمره در این ۲ درس داشته باشند برابر است با: (کامپیوتر - سراسری ۷۸)

۱) $\frac{9}{16}$ ۲) $\frac{11}{16}$ ۳) $\frac{15}{16}$ ۴) $\frac{13}{16}$

۳ـ در یک آزمایش تصادفی احتمال موفقیت برابر p است. به تعداد n بار این آزمایش را تجربه می‌کنیم. شرط لازم و کافی برای اینکه احتمال k_1 موفقیت برابر با احتمال $k_2 = k_1 + 1$ موفقیت در این n بار باشد عبارت است از . . . (برق - سراسری ۷۹)

۱) $np = k_1$ ۲) $np = k_1 + 1$ ۳) $(n+1)p = k_1$ ۴) $(n+1)p = k_1 + 1$

۴ـ فرض کنید X_1, X_2, X_3, X_4 نمونه تصادفی از یک توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و واریانس ۹ و Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 نیز نمونه تصادفی از یک توزیع نرمال دیگر با میانگین ۳ و واریانس ۴ باشند. (دو توزیع مستقل از هم فرض می‌شوند). اگر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به ترتیب میانگین‌های نمونه‌های فوق باشند، در این صورت $P(\bar{X} > 2\bar{Y})$ برابر است با: (کامپیوتر- سراسری ۷۹)

۱) $\int_{-\infty}^{1/6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ ۲) $\int_{-\infty}^{-0/6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ ۳) $\int_{-\infty}^{0/6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ ۴) $\int_{-\infty}^{-1/6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$

۵ـ فرض کنید سیستمی دارای دو مؤلفه است، که به صورت سری به یکدیگر متصل هستند. طول عمر هر یک از آنها مستقل و از توزیع نمایی با میانگین ۲ تبعیت می‌کند (یعنی، $f(x) = \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2}), x > 0$). میانگین طول عمر سیستم چقدر است؟ (کامپیوتر- سراسری ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶ـ در میان ۲۰۰ قطعه تولیدی ۸ قطعه معیوب است. یک نمونه تصادفی به تعداد ۱۰ قطعه انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه یک قطعه ناقص در این نمونه باشد چیست؟ (برق - سراسری ۸۰)

۱) ۰/۸۲۷۸ ۲) ۰/۸۷۷۲ ۳) ۰/۲۸۷۸ ۴) ۰/۷۸۲۸

۷ـ X و Y متغیرهای تصادفی و هر دو دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ هستند، آنگاه احتمال آنکه $4x^2 + 9y^2$ بزرگتر از یک باشد چیست؟ (کامپیوتر- سراسری ۸۰)

۱) ۰/۱۳۱ ۲) ۰/۴۷۶ ۳) ۰/۵۲۳ ۴) ۰/۸۶۹

۸ـ چگالی احتمال متغیرهای تصادفی مستقل از هم X و Y به صورت زیر است:

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}\qquad f_2(y)=\begin{cases}3e^{-3y} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

چگالی احتمال مجموع آنها یعنی $Z = X + Y$ چیست؟ (کامپیوتر-سراسری ۸۰)

۱) $f_Z(z)=\begin{cases}6(e^{-2z}-e^{-3z}) & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$

۲) $f_Z(z)=\begin{cases}2e^{-2z}-3e^{-3z} & z\geq 0\\ 0 & z\leq 0\end{cases}$

۳) $f_Z(z)=\begin{cases}6(e^{-3z}-e^{-2z}) & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$

۴) $f_Z(z)=\begin{cases}6(e^{-3z}+e^{-2z}) & z\geq 0\\ 0 & z<0\end{cases}$

۹ـ اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل بوده و هر دو دارای توزیع هندسی با پارامتر p، $0 < p < 1$ باشند آنگاه مقدار $P(X = Y)$ کدام است؟ (برق-سراسری ۸۱)

۱) $\frac{p}{2-p}$ ۲) $\frac{1}{2-p}$ ۳) $\frac{p}{1-p}$ ۴) $\frac{1}{1-p}$

۱۰ـ اگر $X \sim N(1,4)$ و $Y \sim N(1,9)$، و X و Y مستقل باشند، آنگاه به ازای کدام مقدار a، رابطه زیر برقرار است؟ (برق-سراسری ۸۱)

$$P(2X+Y\leq a)=P(4X-2Y\geq 4a)$$

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) 0

۱۱ـ فرض کنید زمان بین ورود هر دو مشتری به یک فروشگاه به صف صندوق دارای توزیع (پخش) نمایی با میانگین $\frac{1}{3}$ دقیقه است. در این صورت احتمال آنکه در ۲ دقیقه ۳ نفر وارد صف صندوق شوند چقدر است؟ (کامپیوتر-سراسری ۸۱)

۱) $\frac{6^3}{e^6}$ ۲) $\frac{6^2}{e^6}$ ۳) $\frac{2^6}{e^6}$ ۴) $\frac{3^6}{e^6}$

۱۲ـ یک تاس سالم را آنقدر می‌اندازیم تا برای اولین بار شش بیاید. اگر X شماره انداختنها برای مشاهده اولین شش باشد، احتمال اینکه X مضرب سه باشد چقدر است؟ (کامپیوتر-سراسری ۸۱)

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۱۷۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۲۷۵

۱۳ـ فرض کنید $X_1 \sim N(1,6)$ و $X_2 \sim N(7,3)$ و X_1 و X_2 و X_3 مستقل از هم فرض شوند، در این صورت $P(X_1 > X_2)$ با کدام گزینه برابر است؟ (کامپیوتر-سراسری ۸۱)

۱) $1-N(\frac{1}{2})$ ۲) $1-N(1)$ ۳) $1-N(\frac{1}{4})$ ۴) $1-N(\frac{1}{\sqrt{3}})$

۱۴ـ در یک کارخانه تولیدی لامپ، ۵ درصد لامپهای تولیدی معیوب است. برای کنترل، هر روز ۱۰ لامپ را بصورت تصادفی انتخاب کرده، آزمایش می‌کنند. انتظار می‌رود چند روز از سال بیش از ۳ لامپ معیوب مشاهده شود؟ (کامپیوتر-سراسری ۸۱)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۳۷۵ ۴) ۰/۱۷۵

۱۵ـ در شش پرتاب مستقل یک تاس مناسب (ایده‌آل)، احتمال اینکه عدد ۳ لااقل یک بار ظاهر شود، چقدر است؟ (برق-سراسری ۸۲)

۱) $(\frac{5}{6})^6$ ۲) $1-\frac{5}{6}$ ۳) $1-(\frac{5}{6})^6$ ۴) $\frac{1}{6}+(\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^3+\ldots+(\frac{1}{6})^6$

۱۶ـ متغیر تصادفی X بر بازه $(-1,3)$ به طور یکنواخت توزیع شده است و متغیر تصادفی Y توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ دارد. مقدار λ به طوری که: $Var(X) = Var(Y)$، برابر است با: (برق-سراسری ۸۲)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۷ـ اگر تابع توزیع X بصورت زیر باشد:

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\leq t\leq 0\\ 1 & t>1\end{cases}$$

تابع توزیع $Y = -LnX$ کدام است؟ (کامپیوتر-سراسری ۸۲)

۱) $F_Y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-e^{-t} & t\geq 0\end{cases}$

۲) $F_Y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-e^{-\frac{t}{2}} & t\geq 0\end{cases}$

۳) $F_Y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-e^{-\frac{2}{3}t} & t\geq 0\end{cases}$

۴) $F_Y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-e^{-2t} & t\geq 0\end{cases}$

۱۸ـ احتمال اینکه معادله زیر جواب حقیقی داشته باشد چقدر است؟ $x^2 + ax + 4 = 0$ که در آن a تعداد دفعاتی است که یک سکه را آنقدر پرتاب کنیم تا اولین شیر بیاید؟ (کامپیوتر-سراسری ۸۲)

۱) $P=\frac{7}{8}$ ۲) $P=\frac{1}{4}$ ۳) $P=\frac{1}{8}$ ۴) $P=\frac{1}{2}$

۱۹ـ دو دوست قرار می‌گذارند که در محلی با هم ملاقات کنند. اگر هر شخص مستقل از دیگری با تابع چگالی احتمال یکنواخت بین ساعت ۱۲ و ۱۳ به محل ملاقات برسد، احتمال آنکه نفر اول که به محل ملاقات می‌رسد بیشتر از ۱۰ دقیقه صبر کند، چیست؟ (برق-سراسری ۸۳)

۱) $\frac{25}{36}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{8}{9}$

۲۰ـ طول عمر یک لامپ رادیویی بر حسب ساعت، یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 100\\ \frac{100}{x^2} & x>100\end{cases}$$

با فرض کارکرد مستقل لامپ‌های موجود در رادیو، احتمال آنکه ۲ لامپ از ۵ لامپ موجود در رادیو در اولین ۱۵۰ ساعت کارکرد، معیوب شوند کدام است؟ (برق-سراسری ۸۳)

۱) $\frac{120}{243}$ ۲) $\frac{80}{243}$ ۳) $\frac{60}{243}$ ۴) $\frac{40}{243}$

۲۱ـ تعداد مشتریانی که هر روز به یک فروشگاه برای خرید مراجعه می‌کند یک متغیر تصادفی پواسون با متوسط ۱۲۰ نفر است. اگر ساعات کار این فروشگاه از ۹ صبح تا ۷ بعدازظهر باشد، آنگاه احتمال آنکه در یک فاصلهٔ زمانی ده دقیقه‌ای حداقل دو نفر به فروشگاه مراجعه کنند برابر است با: (کامپیوتر-سراسری ۸۳)

۱) $\frac{e-3}{e}$ ۲) $\frac{e}{e+3}$ ۳) $\frac{e^2}{e^2+3}$ ۴) $\frac{e^2-3}{e^2}$

۲۲ـ احتمال اینکه معادلهٔ روبرو دو ریشه غیر منفی داشته باشد چقدر است؟ $ax^2 - 4x + a = 0$
که در آن a تعداد دفعاتی است که یک سکه را پرتاب می‌کنیم تا اولین شیر بیاید. (کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{7}{8}$

۲۳ـ اگر $X \sim N(1,4)$ و $Y \sim N(1,9)$ و X و Y مستقل باشند، آنگاه به ازای کدام مقدار a، رابطه زیر برقرار است:
$P(2X + Y \le a) = P(4X - 2Y \ge 4a)$
(کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) 0 ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۴ـ اگر $X \sim N(1,16)$ و $X \sim N(1,9)$ و X و Y مستقل باشند، آنگاه مقدار $Var(XY)$ کدام است؟
(کامپیوتر ـ سراسری ۸۳)

۱) ۱۲۱ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۶۹ ۴) ۱۹۶

۲۵ـ با $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مقادیر بدست آمده از n بار نمونه گیری از یک جمعیت دارای متوسط m و با S^2 واریانس نمونه، آمارهٔ مناسب برای انجام آزمون‌های آماری برآورد واریانس عبارت است از: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\frac{\bar{x} - m}{S}$ ۲) $\frac{\bar{X} - m}{S\sqrt{n+1}}$ ۳) $\frac{\bar{X} - m}{S\sqrt{n-1}}$ ۴) $\frac{\bar{X} - m}{S\sqrt{n}}$

۲۶ـ با $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مقادیر به دست آمده از n بار نمونه‌گیری و با $\bar{X}$ متوسط نمونه، برآورد بی طرفانه (نااریب) برای واریانس عبارت است از: (کامپیوتر ـ سراسری ۸۴)

۱) $\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$ ۲) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$ ۳) $\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$ ۴) $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$

۲۷ـ اگر متغیرهای $x_1, x_2, \ldots, x_{64}$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با میانگین ۱ و واریانس ۴ باشد در این صورت $P(\sum_{i=1}^{64} x_i > 64)$ کدام است؟ (مؤلف)

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۲۸ـ مصرف روزانه آب در شهر دارای توزیع گاما با پارامترهای $(\alpha = 2 , \beta = 3)$ می‌باشد احتمال اینکه در روز معینی شهروندان دچار کمبود آب شوند کدام است؟ (مؤلف)

۱) e^{-3} ۲) $2e^{-3}$ ۳) $3e^{-3}$ ۴) $4e^{-3}$

۲۹. اگر X یک متغیر تصادفی نمایی با تابع چگالی $x \ge 0$ $\lambda e^{-\lambda x}$ باشد، $\int_0^{\infty} P(X > x)dx$ کدام است؟ (مؤلف)

۱) λ^2 ۲) $\frac{\lambda^2}{2}$ ۳) λ ۴) $\frac{1}{\lambda}$

۳۰ـ فرض کنید $X_1 \sim N(6,1)$ و $X_2 \sim N(7,3)$ مستقل از هم باشند، در اینصورت $P(X_1 > X_2)$ کدام است؟
(مؤلف)

۱) $1 - N(\frac{1}{2})$ ۲) $1 - N(1)$ ۳) $1 - N(\frac{1}{4})$ ۴) $1 - N(\frac{1}{\sqrt{3}})$

پاسخنامه تستهای طبقه‌بندی شده فصل چهارم

۱ـ گزینه «۲» استاندارد می‌کنیم:

$$\mu = \Sigma x . f(x) = 0/1 \qquad \sigma^2 = E(x^2) - E^2(x) = 0/69 \to \sigma = 0/7$$

$$P(\frac{\Sigma x_i}{100} \le \frac{17}{100}) = P(\bar{x} < \frac{17}{100}) = P(Z < \frac{0/17 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{100}}}) = P(Z < 1) = \phi(1)$$

۲ـ گزینه «۴»

$$\text{معدل}: \frac{3X + 2y}{5} \qquad \frac{3\mu X + 2\mu y}{5} = \frac{70}{5} = 14 = \mu_{3X+2y}$$

$$P = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2} \quad P(X \ge 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{5}{0}p^0 q^{5-0} - \binom{5}{1}p^1 q^{5-1} = \frac{13}{16}$$

۳ـ گزینه «۴» در یک توزیع دو جمله‌ای قرار داریم:

$$\begin{cases} P(X = k_1) = P(X = k_2) \Rightarrow \binom{n}{k_1}P^{k_1}q^{n-k_1} = \binom{n}{k_1+1}P^{k_1+1}q^{n-k_1-1} \\ k_2 = k_1 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-k)!k_1!} = \frac{n!}{(n-k_1-1)!\,(k_1+1)!} \times \frac{P}{q} \Rightarrow (k_1+1)q = (n-k_1)P \xrightarrow[q=1-p]{} (k_1+1) = (n+1)P$$

۴ـ گزینه «۱»

$$\bar{X} \sim N(10, \frac{9}{4}) \quad \bar{Y} \sim N(3, \frac{4}{4}) \quad P(\bar{X} > Z\bar{Y}) = P(\bar{X} - Z\bar{Y} > 0)$$

$$\mu_{\bar{x}-2\bar{y}} = \mu_{\bar{x}} - 2\mu_{\bar{y}} = 10 - 6 = 4 \qquad \sigma^2_{\bar{x}-2\bar{y}} = \sigma^2_{\bar{x}} + 4\sigma^2_{\bar{y}} = \frac{25}{4}$$

$$P(X > \frac{4}{\frac{5}{2}}) = P(Z > -\frac{8}{5}) = P(Z < \frac{8}{5}) = \int_{-\infty}^{1/6} f(z)dz$$

۵ـ گزینه «۳»

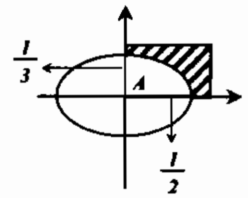
$$\beta_2 = 2 \,,\ \beta_1 = 2 \ \Rightarrow \ \text{میانگین طول عمر سیستم} = \frac{2+2}{2} = 2$$

۶ـ گزینه «۴» از تخمین دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$P = \frac{8}{200} = 0/04 \text{ و } n = 10$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0/04)^1(0/96)^9 = 0/2878$$

۷ـ گزینه «۲» با توجه به آنکه مساحت کل ۱ است. بنابراین:



راه حل اول : $1-(A)$ مساحت ناحیه $=1-\frac{\pi ab}{4}=1-\frac{\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{4}=0/476$

راه حل دوم : $P(4x^2+9y^2\le 1)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(2)\times a\times b\times r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4}\Rightarrow P(4x^2+9y^2\ge 1)=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4}=0/476$$

$$4x^2+9y^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$$

۸ـ گزینه «۱» طبق رابطه گفته شده در کتاب:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\,dy=\int_0^z 3e^{-3(z-x)}\times 2e^{-2x}dx=6\int_0^z e^{-3z}e^x dx=6e^{-3z}e^x\Big|_0^z$$

$$=6e^{-3z}(e^z-1)=6(e^{-2z}-e^{-3z})$$

۹ـ گزینه «۱»

$$\left.\begin{cases}f(x)=q^{x-1}p\\ x=1,2,\cdots\end{cases}\quad\begin{cases}f(y)=q^{y-1}p\\ y=1,2,\cdots\end{cases}\right]\xrightarrow{x,y\ \text{مستقل}}\begin{array}{l}f(x,y)=f(x)\times f(y)=q^{x-1}p\times q^{y-1}p\\ P(X=Y)=\sum_{x=1}^{\infty}q^{x-1}p\times q^{x-1}p\end{array}$$

$$=\sum_{x=1}^{\infty}p^2q^{2x-2}=\frac{p^2}{q^2}\sum_{x=1}^{\infty}q^{2x}=\frac{p^2}{q^2}\underbrace{(q^2+q^4+\cdots)}_{\text{سری هندسی}}=\frac{p^2}{q^2}\times\frac{q^2}{1-q^2}=\frac{p^2}{\underbrace{(1-q)}_{p}(1+q)}=\frac{p}{1+1-p}=\frac{p}{2-p}$$

۱۰ـ گزینه «۳»

$$P(2x+y\le a)=P(4x-2y\ge 4a)\Rightarrow P(z<\frac{a-\mu_{2x+y}}{\sigma_{2x+y}})=P(z>\frac{4a-\mu_{4x-2y}}{\sigma_{4x-2y}})$$

$$\Rightarrow P(z<\frac{a-3}{5})=P(z>\frac{4a-2}{10})\Rightarrow\frac{a-3}{5}=-\frac{4a-2}{10}\Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases}\mu_{2x+y}=2\mu_x+\mu_y=3\\ \sigma^2_{2x+y}=4\sigma^2_x+\sigma^2_y=25\\ \sigma_{2x}+y=5\end{cases}\qquad\begin{cases}\mu_{4x-2y}=4\mu_x-2\mu_y=2\\ \sigma^2_{4x-2y}=16\sigma^2_x+4\sigma^2_y=100\\ \sigma_{4x-2y}=10\end{cases}$$

۱۱ـ گزینه «۲»

$\beta=\frac{1}{3}\to\lambda=3$ نفر در دقیقه $\to\lambda=6$ در ۲ دقیقه $\Rightarrow$ در توزیع پواسن : $P(X=3)=\frac{e^{-6}6^3}{3!}=\frac{6^2}{e^6}$

۱۲ـ گزینه «۴» توزیع هندسی و X : تعداد پرتابها تا رسیدن به اولین‌ها

$$q=\frac{5}{6},p=\frac{1}{6}\qquad f(x)=pq^{x-1}\qquad x=1,2,\ldots$$

$p(x$ مضرب ۳$)\to p(x=3)+p(x=6)+\cdots=pq^2+pq^5+pq^8+\cdots=\frac{pq^2}{1-q^3}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{5^2}{6}}{1-\frac{5^3}{6}}=0/275$

۱۳ـ گزینه «۱»

$$P(X_1>X_2)=P(X_1-X_2>0)=P(\frac{X_1-X_2-\mu_{x_1-x_2}}{\sigma_{x_1-x_2}}>\frac{0-\mu_{x_1-x_2}}{\sigma_{x_1-x_2}})=P(Z>\frac{1}{2})=1-P(Z<\frac{1}{2})=1-N(\frac{1}{2})$$

$$\mu_{x_1-x_2}=\mu_{x_1}-\mu_{x_2}=-1$$

$$\sigma^2_{x_1-x_2}=\sigma^2_{x_1}+\sigma^2_{x_2}=4$$

۱۴ـ گزینه «۳»

$P=0/05\quad q=0/95$

$$P(x>3)=1-P(x\le 3)=1-\binom{10}{0}(0/05)^0(0/95)^{10}-\binom{10}{1}(0/05)^1(0/95)^9-\binom{10}{2}(0/05)^2(0/95)^8$$

$$-\binom{10}{3}(0/05)^3(0/95)^7=0/0010285$$

$$E(x)=np=365\times 0/0010285=0/375$$

۱۵ـ گزینه «۳» از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$p=p($ظاهر شدن ۳$)=\frac{1}{6}\ ;\ q=p($ظاهر نشدن ۳$)=\frac{5}{6}$

$$\underbrace{p(x\ge 1)}_{\text{حداقل یکبار}}=1-p(x=0)=1-\binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{6-0}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$$

۱۶ـ گزینه «۱»

$X\sim U(a,b)$	$E(x)=\frac{a+b}{2}$	$\sigma^2_x=\frac{(b-a)^2}{12}$
$y\sim exp(\lambda)$	$E(y)=\frac{1}{\lambda}$	$\sigma^2_y=\frac{1}{\lambda^2}$

$X\sim U(-1,3)$ یکنواخت
$y\sim exp(\lambda)$

$$Var(x)=Var(y)\Rightarrow\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow\frac{(3-(-1))^2}{12}=\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow\frac{16}{12}=\frac{1}{\lambda^2}\Rightarrow\lambda^2=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}\Rightarrow\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۷ـ گزینه «۱»

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t\le 1\\ 1 & t>1\end{cases} \xrightarrow{F'(x)} \begin{cases} f_X(t)=1 \\ 0\le t\le 1\end{cases} \xrightarrow[x=e^{-y}]{y=-Lnx} f(y)=\left|-e^{-y}\right|\times 1=e^{-y}$$

$$F_Y(y)=\int_0^t e^{-y}dy=\left[-e^{-y}\right]_0^t=1-e^{-t} \qquad t\ge 0$$

۱۸ـ گزینه «۳»

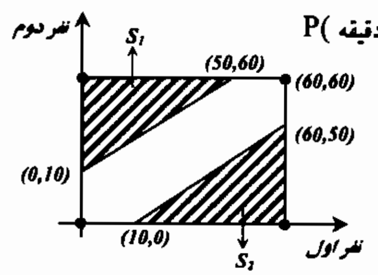
$$x^2+ax+4=0 \xrightarrow[\text{حقیقی}]{\text{ریشه}} \Delta\ge 0 \longrightarrow a^2-16\ge 0 \longrightarrow a^2\ge 16 \longrightarrow a\ge 4$$

$$P(a\ge 4)=\underbrace{q^3p}_{a=4}+\underbrace{q^4p}_{a=5}+\cdots=\frac{q^3p}{1-q}=q^3=\frac{1}{8} \quad ; \quad P(a)=pq^{a-1} \quad a=1,2,\ldots$$

$P=\frac{1}{2}$ و $q=\frac{1}{2}$

۱۹ـ گزینه «۱»

انتظار بیش از ۱۰ دقیقه $=S_1+S_2=$ سطوح هاشورخورده



$$P(\text{انتظار بیش از ۱۰ دقیقه})=\frac{S_1+S_2}{\text{مساحت مربع}}=\frac{\frac{1}{2}\times50\times50+\frac{1}{2}\times50\times50}{60\times60}=\frac{2500}{3600}=\frac{25}{36}$$

۲۰ـ گزینه «۲»

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le100\\ \frac{100}{x^2} & x>100\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}P=P(\text{معیوب شدن تا ۱۵۰ ساعت})=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}dx=\left[-\frac{100}{x}\right]_{100}^{150}=\frac{1}{3}\\ q=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}p^2q^3=\frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$

۲۱ـ گزینه «۴»

$\lambda=120$ نفر در روز کاری $\xrightarrow{\text{روز کاری ۱۰ ساعت}} \lambda=\frac{120}{10}=12$ نفر در ساعت $\rightarrow \lambda=\frac{12}{6}=2$ نفر در ۱۰ دقیقه

$$P(X\ge2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\frac{e^{-2}2^0}{0!}-\frac{e^{-2}2^1}{1!}=1-3e^{-2}=\frac{e^2-3}{e^2}$$

۲۲ـ گزینه «۳»

$$ax^2-4x+a=0\to\Delta\ge0\to4-a^2\ge0\to a^2\le4\to a\le2$$

$$\left.\begin{cases}P=\frac{1}{2}\\ q=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad P(a)=pq^{a-1},\ a=1,2,\ldots\\ a=\text{(هندسی) تعداد دفعات برای اولین شیر}\end{cases}\right\} P(a\le2)=P(a=1)+P(a=2)=P+qP=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

۲۳ـ گزینه «۲» تکرار تست سال ۸۲ می‌باشد.

۲۴ـ گزینه «۳»

$$Y\sim N(1,9)\begin{cases}\mu_Y=1=E(Y)\\ \sigma_Y^2=9=E(Y^2)-E(Y)^2\Rightarrow E(Y^2)=10\end{cases}$$

$$X\sim N(1,16)\begin{cases}\mu_X=1=E(X)\\ \sigma_X^2=16=E(X^2)-E(X)^2\Rightarrow E(X^2)=17\end{cases}$$

$$Var(XY)=E(X^2Y^2)-\left(E(XY)\right)^2\xrightarrow[\text{استقلال}]{\text{شرط}}=E(X^2)E(Y^2)-E(X)^2E(Y)^2=17\times10-1\times1=169$$

۲۵ـ گزینه «۴»

۲۶ـ گزینه «۴»

۲۷ـ گزینه «۲»

$$P(\overline{X}>1)=P(Z>\frac{1-1}{\frac{2}{8}})=P(Z>0)=\frac{1}{2}$$

۲۸ـ گزینه «۱»

$X\sim\pi(2,3)$

۲۹ـ گزینه «۴»

$$\int_0^\infty P(X>x)\,dx=\int_0^\infty(1-F_X(x))\,dx=\int_0^\infty 1\,dx-\int_0^\infty F(x)\,dx=1-1+E(X)=E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

۳۰ـ گزینه «۱»

$$P(X_1>X_2)=P(X_1-X_2>0)$$
$$E(X_1-X_2)=6-7=-1$$
$$P(X_1-X_2>0)=P(Z>\frac{1}{2})=1-P(Z\le\frac{1}{2})=1-N(\frac{1}{2})$$

آزمون فصل چهارم

۱ـ آزمایشی به صورت زیر انجام می‌شود، سه سکه همزمان پرتاب می‌شوند. این آزمایش آنقدر ادامه پیدا می‌کند تا به طور همزمان هر سه سکه شیر را نشان دهند. آنگاه متغیر تصادفی این آزمایش ....

۱) گسسته و متناهی می‌باشد. ۲) پیوسته و نامتناهی می‌باشد. ۳) گسسته و نامتناهی می‌باشد. ۴) پیوسته و متناهی می‌باشد.

۲ـ کدامیک از توزیع‌های زیر بی‌حافظه می‌باشند؟

۱) نمایی و هندسی ۲) نمایی و فوق‌هندسی ۳) گاما و نمایی ۴) نمایی و بینم

۳ـ اگر تعداد مشتریانی که در ساعت وارد یک فروشگاه می‌شوند دارای توزیع پواسون با $\lambda = 3$ باشد و بدانیم که در یک ساعت اول یک مشتری وارد شده است، احتمال اینکه این مشتری در ۲۰ دقیقه اول وارد شده باشد، چقدر است؟

۱) e^{-1} ۲) $\frac{e^{-1} \times 1^1}{1!}$ ۳) $\frac{e^{-3} \times -3^1}{1!}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۴ـ یک کارخانه مایع ظرفشویی تولیدات خود را در ظروفی بسته‌بندی می‌کند که وزن این ظروف بعد از پر شدن دارای توزیع نرمال با میانگین ۵۰۰ گرم و واریانس ۱۰۰ گرم است. اگر از این خط بسته‌بندی ۵۰ نمونه برداشته شود. به طور متوسط چه تعدادی از این بسته‌ها دارای وزنی کمتر از ۵۰۰ گرم می‌باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۲۵

۳) ۱۲/۵ ۴) بدون جدول نرمال نمی‌توان محاسبه کرد.

۵ـ یک شرکت اقدام به تولید لوله‌هایی می‌کند که طول این لوله‌ها دارای توزیع یکنواخت در بازه $(10-12)cm$ می‌باشد اندازه مورد نیاز برای مصرف این لوله $11\ cm$ است. اگر طول لوله تولید شده با مقدار مورد نیاز اختلاف داشته باشد هزینه‌ای برابر $20(x-11)^2$ واحد پولی دارد. اگر روزانه ۵۰ عدد از این قطعه تولید شود به طور متوسط چقدر هزینه دوباره کاری داریم؟

۱) ۴۰۰ ۲) ۱۲۰۰ ۳) ۱۳۲۰۰ ۴) ۲۰۰۰۰

۶ـ از جعبه‌ای که دارای ۴ مهره قرمز و ۳ آبی است، ۱۰ توپ با جایگذاری انتخاب می‌کنیم. متوسط تعداد توپهای قرمز استخراجی در این نمونه برابر است با:

۱) ۴ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{40}{7}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۷ـ تعداد مشتریانی که وارد یک فروشگاه می‌شوند دارای توزیع پواسن با میانگین ۱۲ نفر در ساعت می‌باشد. احتمال اینکه مغازه‌دار برای ورود متوالی دو مشتری بیش از ۲۰ دقیقه انتظار بکشد چقدر است؟

۱) ۰/۰۱۸ ۲) ۰/۱۲۷ ۳) ۰/۲۱۳ ۴) ۰/۰۳۲

۸ـ اگر X یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد مطلوب است $E(X^4 + X^3 + X^2 + X)$.

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۰

۹ـ یک تاس چهار وجهی منصف را که بر روی هر وجه آن حروف C, B, A و D نوشته شده که هر حرف معرف یک نفر است در نظر بگیرید. حال فرض کنید این تاس آنقدر پرتاب می‌شود تا یکی از این وجوه سه بار مشاهده شود و آن شخص یک بار برنده شود. حال احتمال اینکه نفر A در نهمین پرتاب برای اولین بار برنده شود چقدر است؟

۱) ۰/۲۳۴ ۲) ۰/۶۲۳ ۳) ۰/۰۷۸ ۴) ۰/۲۵

۱۰ـ در سؤال قبل انتظار دارید در چند بار پرتاب تاس، A برای دومین بار برنده شود؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۱۱ـ یک اتومبیل دارای ۴ لاستیک است که طول عمر این لاستیکها دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰۰۰۰ کیلومتر است. اگر بدانیم این ماشین ۵۰۰۰ کیلومتر را بدون مشکل طی کرده چقدر احتمال دارد این مقدار به ۱۲۰۰۰ کیلومتر افزایش پیدا کند؟

۱) ۰/۰۶۱ ۲) ۰/۴۹۷ ۳) ۰/۰۰۸ ۴) ۰/۳۰۱

۱۲ـ در شهر تهران ۵۰% تماشاگران تلویزیون بیننده شبکه سوم و ۱۰% برنامه شبکه اول و ۱۵% برنامه شبکه و ۲۵% برنامه شبکه چهارم را تماشا می‌کنند. اگر از افراد این شهر ۱۰ نفر انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد که ۲ نفر شبکه اول و ۳ نفر شبکه دوم و ۴ نفر شبکه سوم را ببینند؟

۱) ۰/۰۰۶۶ ۲) ۰/۲۰۵ ۳) ۰/۰۵ ۴) ۰/۰۱۲

۱۳ـ یک سکه پرتاب می‌شود چقدر احتمال دارد ۲ شیر قبل از ۲ خط مشاهده شود؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲۵

۱۴ـ یک جعبه شامل 2^5 مهره است که $\binom{5}{x}$ تای آن دارای شماره x است. $(x = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ دو مهره با جایگذاری از جعبه خارج می‌کنیم اگر x شماره روی آن باشد $Var(X)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۲/۵

۱۵ـ فرض کنید که به طور متوسط در هر ساعت ۳۰ مشتری طبق فرآیند پواسن به مغازه‌ای مراجعه می‌کنند احتمال اینکه مغازه‌دار پیش از رسیدن دو مشتری نخست، بیش از ۵ دقیقه انتظار بکشد چقدر است؟

۱) ۰/۸۷۲ ۲) ۰/۴۳۱ ۳) ۰/۲۸۷ ۴) ۰/۵۶۱

۱۶ـ اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل پواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند و $Y = X_1 + X_2$ باشد مطلوب است توزیع $Z = (X_1 | Y)$.

۱) $Poisson(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})$ ۲) $B(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2}, y)$ ۳) $B(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, z)$ ۴) $Poisson(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2})$

۱۷ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۰ و واریانس ۴ می‌باشد. امید ریاضی تقریبی تابع $y = \ln x + x$ کدام است؟

۱) ۱۴/۵ ۲) ۱۱/۳ ۳) ۱۲/۲۸ ۴) ۱۳/۲

۱۸ـ فرض کنید که تابع چگالی توأم X و Y بصورت زیر باشد:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y} \quad 0 < x < \infty \quad 0 < y < \infty$$

توزیع $Z = (X | Y = y)$ کدام است؟

۱) یکنواخت ۲) نمایی ۳) گاما ۴) توزیع خاصی ندارد

۱۹ـ تعداد افرادی که به یک سیستم بانکی وارد می‌شوند دارای توزیع پواسن با میانگین ۱۰ نفر در ساعت می‌باشد. حال اگر بدانیم یک نفر بین ساعت ۱۱ تا ۱۳ به سیستم وارد شده باشد چقدر احتمال دارد این شخص بین ساعت ۱۱ الی ۱۲/۵ به سیستم وارد شده باشد؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $e^{-1/5}$ ۴) ۰

۲۰ـ سه نفر در محلی با هم قرار ملاقات دارند که هر یک مستقل از دیگری و بصورت یکنواخت بین ساعات ۱۰ تا ۱۱ به محل قرار می‌رسند. احتمال اینکه یکی از ۳ نفر در نیم ساعت اول برسد چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۲۱ـ فرض کنید $X \sim u(0,1)$ آنگاه x_1, x_2, x_3 را از این توزیع انتخاب کرده $y = \min(x_1, x_2, x_3)$ را تعریف می‌کنیم حال تابع توزیع y کدام است؟

۱) $0 < y < 1, (1-y)^2$
۲) $3(1-y)^2 \quad 0 < y < 1$
۳) $3(y-1)^2 \quad 0 < y < 1$
۴) $\frac{1}{y} \quad 0 < y < 1$

۲۲ـ فرض کنید طول عمر نوعی لامپ دارای توزیع نمایی به صورت زیر می‌باشد $E(x \mid x \geq 50)$ کدام است؟

$$f_X(x) = \frac{1}{200} e^{\frac{-x}{200}} \qquad x > 0$$

۱) ۸۸۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۱۵۰

۲۳ـ اگر x_1, x_2 دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $(5, \frac{1}{2})$ باشند آنگاه $p(x_1^2 \mid x_1 + x_2 = 5)$ کدام است؟

۱) ۰/۲۸۲ ۲) ۰/۳۹۷ ۳) ۰۷۱۴ ۴) ۰/۸۲۸

۲۴ـ x_1, x_2 دارای توزیع نمایی با پارامترهای λ می‌باشند حال $z = x_1 + x_2$ دارای توزیع . . . است.

۱) بتا ۲) نرمال ۳) نمایی ۴) کای‌مربع

۲۵ـ تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم که اگر x برابر مجموع مقادیر و y برابر تفاضل نتیجه تاس دوم از تاس اول باشد $cov(x,y)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۲۶ـ فرض کنید $x_1, x_2 \ldots x_n$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشند و $y_1, y_2 \ldots y_k$ نیز دارای توزیع نرمال صفر و یک باشند در اینصورت $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(y_i - \bar{y})^2}{k-1}$ تعریف می‌شود حال تابع نمونه‌ای $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma s_y \sqrt{n}}$ دارای توزیع . . . است.

۱) t با n درجه آزادی
۲) t با n-1 درجه آزادی
۳) t با k-1 درجه آزادی
۴) توزیع خاصی نیست

۲۷ـ فرض کنید $x_1, x_2 \ldots x_n$ یک نمونه n تایی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ_n^2 می‌باشند و $y_1, y_2 \ldots y_n$ نیز نمونه n تایی از یک توزیع نرمال با میانگین μ_y، σ_y^2 باشند توزیع تابع $Z = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_y)^2} \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$ کدام است؟

۱) توزیع F با n و n درجه آزادی
۲) توزیع F با n-1 و n-1 درجه آزادی
۳) توزیع F با ۱ و n درجه آزادی
۴) توزیع t با ۲n درجه آزادی

۲۸ـ فرض کنید x_1, x_2, x_3 دارای توزیع نرمال استاندارد باشند در اینصورت امید ریاضی متغیر تصادفی $Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ کدام است؟

۱) ۳n ۲) ۶ ۳) ۰ ۴) ۳

۲۹ـ اگر $f \sim F_{(10,12)}$ باشد و $P(F > x) = 0/01$ در این صورت x کدام است؟

۱) $F_{0/95}(10,12)$ ۲) $F_{0/95}(12,10)$ ۳) $F_{0/95}(10,12)$ ۴) $F_{0/99}(12,10)$

۳۰ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای (x, p) می‌باشد. مُد یا نما متغیر تصادفی X کدام است؟

۱) $[np]$ ۲) $[\frac{n}{p}]$ ۳) $[(n-1)p]$ ۴) $[(n+1)p]$

۳۱ـ فرض کنید X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ باشد. همچنین در نظر بگیرید. $f(y/x) \sim N(x,x)$ می‌باشد حال $var(y)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲x ۴) $\frac{1}{6}$

۳۲ـ اگر نرخ ورود افراد به یک فروشگاه ۲۰ نفر در ساعت باشد و هم چنین اگر ۰/۰۲۵ مشتریان را مردان تشکیل دهند چقدر احتمال دارد در ظرف یک ساعت ۴ مرد وارد فروشگاه شده باشد به شرطی که بدانیم ۱۲ نفر به فروشگاه وارد شده‌اند؟

۱) ۰/۳۹۵ ۲) ۰/۱۹۶ ۳) ۰/۸۰۴ ۴) ۰/۴۰۸

۳۳ـ متغیر تصادفی X توزیع نرمال با میانگین نامعلوم و واریانس σ^2 دارد. نمونه X_1, X_2, X_3 را می‌گیریم و مایلیم تعیین کنیم با چه احتمالی دست کم ۰/۹۵ از توزیع فوق در بازه $(-\infty, \mu + 2s]$ قرار می‌گیرد. برای تعیین این احتمال S^2 را واریانس نمونه بگیرید و فرض کنید $Z\,0/05 = 1/645$ است؟

۱) ۰/۴۹۱۶ ۲) ۰/۷۱۲۰ ۳) ۰/۵۰۸۴ ۴) ۰/۶۶۰۵

۳۴ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با [illegible] و واریانس مجهول σ^2 می‌باشد. یک نمونه تصادفی ۲۵ تایی از این توزیع را می‌گیریم و متغیرهای تصادفی $\bar{X}$ و S را به دست می‌آوریم. اگر رابطه $P(5\bar{X} > 1/71S) = 0/05$ برقرار باشد آن‌گاه مقدار $F_{0/9}(1, 24)$ کدام است؟

۱) ۱/۳۶ ۲) ۰/۳۴۲ ۳) ۰/۵۸۵ ۴) ۰/۲۲

۳۵ـ اگر X به طور یکنواخت روی فاصله $(-1, 1)$ توزیع شده باشد در این صورت $P\{|x| > \frac{1}{2}\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{12}$

۳۶ـ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پواسان به ترتیب با پارامترهای ۷ و ۵ باشند $P(X = 5 - Y)$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) ۰/۰۰۴ ۲) ۰/۲۷۱ ۳) ۰/۰۱۲۷ ۴) ۰/۰۲۱۷

۳۷ـ تعداد اتوبوس‌هایی که وارد یک ترمینال می‌شوند دارای توزیع پواسون با نرخ ۳۰ اتوبوس در هر روز است. تعداد افرادی که داخل هر اتوبوس می‌شوند توزیع یکنواخت گسسته در مجموعه $\{1, 2, 3, \ldots, 19\}$ می‌باشد، میانگین تعداد افرادی که در هر روز وارد ترمینال می‌شوند برابر است با:

۱) ۳۰۰ ۲) ۲۸۵ ۳) ۵۷۰ ۴) ۶۰۰

۳۸- اگر متغیرهای تصادفی x و y از یک توزیع دو متغیره نرمال برخوردار باشند و بدانیم کواریانس بین آن‌ها صفر است. آنگاه ....

۱) x و y از هم مستقل هستند. ۲) x و y به هم وابسته‌اند.

۳) x و y ناهمبسته‌اند. ۴) بین x و y وابستگی خطی وجود دارد.

۳۹- اگر X_1, X_2, X_3, X_4 دارای توزیع نمایی با پارامترهای برابر $\frac{1}{2}$ باشد آنگاه $E(X_1+X_2+X_3+X_4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) 2^4

۴۰- فرض کنید متغیر تصادفی X توزیع دارای پواسن با میانگین معلوم باشد حال ضریب تغییرات این توزیع کدام است؟ (λ پارامتر توزیع می باشد)

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$ ۳) λ ۴) $\sqrt{\lambda}$

۴۱- متغیر تصادفی X با توزیع نرمال و میانگین ۲ واریانس ۴ مفروض است. گشتاور مرکزی مرتبه هفدهم آن چقدر است؟

۱) صفر ۲) $(2-4)\times 17$ ۳) 2×17 ۴) 2^{17}

۴۲- اگر $0<x<1$ ، $f(x)=3x^2$ ، آنگاه چگالی $y=-\ln(x)$ کدام است؟

۱) $1-e^{-3y}$ ۲) e^{-3y} ۳) $\frac{1}{3}e^{-3y}$ ۴) $3e^{-3y}$

۴۳- اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۴ باشد. اگر $P\{X>c\}=0/1$ مقدار c کدام است؟

۱) ۱/۲۸ ۲) ۱۴/۵۶ ۳) ۱۲/۲ ۴) ۱/۹۶

۴۴- اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه‌ی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد و اگر $y_1, y_2, ..., y_n$ نمونه‌ای از جامعه‌ای دیگر با توزیع‌نرمال با همان مشخصات باشد دراین صورت توزیع متغیر W کدام است؟

$$W=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\Sigma(y_i-\mu)^2}$$

۱) $\chi^2(n)$ ۲) $t(n)$ ۳) $F(n,n)$ ۴) Z

۴۵- فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه n تایی از یک توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 می‌باشد. حال اگر n یک عدد بسیار بزرگ باشد آن گاه توزیع $y=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ کدام است؟

۱) نرمال استاندارد ۲) نرمال با میانگین $n\mu$ و واریانس $n\sigma^2$

۳) توزیع t با n-1 درجه آزادی ۴) دارای توزیع خاصی نیست.

۴۶- اگر متغیر تصادفی T دارای توزیع t - استیودنت با n درجه آزادی باشد در این صورت $\frac{1}{T^2}$ دارای توزیع .... با .... درجهٔ آزادی است.

۱) کای مربع , n ۲) $F(n,1)$ ۳) $F(1,n)$ ۴) $F(1,n-1)$

۴۷- فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_{25}$ یک نمونه ۲۵ تایی از یک توزیع نرمال استاندارد باشند و داشته باشیم $y=x_1+x_2+...+x_{25}$ آنگاه $Z=\frac{y^2}{25}$ دارای چه توزیعی خواهد بود؟

۱) نرمال چند متغیره ۲) t با ۲۴ درجه آزادی

۳) کای مربع با ۲۵ درجه آزادی ۴) کای مربع با یک درجه آزادی

۴۸- اگر $W\sim F(m,n)$ آنگاه توزیع $Y=\frac{1}{W}$ کدام است؟

۱) $F(m,n)$ ۲) $F(n,m)$ ۳) χ^2 ۴) مشخص نیست.

۴۹- فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی دو تایی از توزیع نمایی با میانگین 1 باشد توزیع $K=\frac{X_1}{X_2}$ کدام است؟

۱) $\chi^2_{(2)}$ ۲) $F(2,2)$ ۳) $F(1,1)$ ۴) $\chi^2_{(1)}$

۵۰- اگر $X\sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ آنگاه توزیع $Y=tagX$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ ۲) $\frac{\pi}{(2+y^2)}$ ۳) $U(0,1)$ ۴) $U(-1,1)$

مدرسان شریف

فصل پنجم

« نظریه برآورد »

در آمار استنباطی از روی نمونه بدست آمده و نتایج آن در مورد پارامترهای جامعه، نتیجه‌گیری و استنباط می‌کنیم. این مبحث به دو بخش تئوری تخمین(برآورد) و آزمون فرضیه تقسیم‌بندی می‌شود. تئوری برآورد، خود شامل دو بخش زیر می‌باشد:

۱) برآورد نقطه‌ای: استفاده از داده‌های حاصل از نمونه‌گیری و بدست آوردن عددی که آن را بتوان بعنوان تخمین پارامتر جامعه در نظر گرفت.

۲) برآورد فاصله‌ای (فاصله اطمینان): بدست آوردن یک فاصله احتمالی که پارامتر جامعه در این فاصله قرار گیرد.

در این بخش به بحث برروی برآوردهای نقطه‌ای می‌پردازیم.

روشهای برآوردیابی:

روش برآورد گشتاوری: فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع f_θ باشد، بطوریکه $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ همچنین فرض کنید k گشتاور اول این توزیع که به صورت توابعی از θ هستند وجود داشته باشد. از تشکیل و حل k معادله زیر برآورد گشتاوری (M.M.E) برای پارامترهای مجهول حاصل خواهد شد.

$$\mu_r \simeq M_r \qquad r = 1, \dots, k$$

مثال ۱: فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد. M.M.E پارامتر θ کدام است؟

۱) $\bar{X}$ ۲) $2\bar{X}$ ۳) $3\bar{X}$ ۴) $4\bar{X}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» از برابری گشتاور اول و امید ریاضی داریم:

$$\mu_1 = E(X_1) = \theta \simeq \bar{x} \Rightarrow \tilde{\theta} = \bar{x}$$

مثال ۲: فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی nتایی از توزیع زیر باشد. MME پارامتر مجهول θ کدام است؟

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \quad 0 < x < 1 \quad \theta > 0$$

۱) $\bar{X}$ ۲) $\frac{1-\bar{X}}{\bar{X}}$ ۳) $\frac{2(1-\bar{X})}{\bar{X}}$ ۴) $\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» از برابری گشتاور اول و امید ریاضی داریم:

$$E(X) = \int_0^1 \theta x^{\theta-1}.x dx \Rightarrow \theta \int_0^1 x^\theta dx = \theta.\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\Big|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1} \quad \Rightarrow \mu_1 = M_1 \Rightarrow \frac{\theta}{\theta+1} = \bar{x} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$$

مثال ۳: فرض کنید ظرفی شامل θ مهره است که از ۱ تا θ شماره‌گذاری شده است. علاقه‌مند به برآورد θ هستیم. یک نمونه n تایی با جایگذاری از این ظرف انتخاب می‌کنیم. برآوردگر M.M برای پارامتر θ را بدست آورید.

☑ **پاسخ:** از برابری گشتاور اول و امید ریاضی داریم:

$$E(X_1) = \frac{\theta+1}{2} \Rightarrow \mu_1 \simeq M_1 \Rightarrow \frac{\theta+1}{2} \simeq \bar{x} \Rightarrow \tilde{\theta}_{mm} = 2\bar{x} - 1$$

از طرفی $\max(x_1, x_2, \dots x_n) \geq \theta$ در این صورت یک برآوردگر مناسب عبارت است از $\max(x_{(n)}, 2\bar{x} - 1)$.

مثال ۴: فرض کنید یافته‌های ۰/۹، ۰/۴، ۰/۲، ۰/۷ و ۰/۳ مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآورد پارامتر θ به روش گشتاوری کدام است؟

$$f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1} \quad 0 < x < 1 \quad \theta > 0$$

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۹ ۴) ۱

☑ **پاسخ:** گزینه «۴»

$$E(X) = \int_0^1 x\theta(1-x)^{\theta-1} dx \Rightarrow 1 - x = u \Rightarrow -dx = du$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_1^0 \theta(u^{\theta-1} - u^\theta) du = \theta\left[\frac{u^\theta}{\theta} - \frac{u^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_1^0 = \frac{1}{\theta+1}$$

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{5}(0/9 + 0/4 + 0/2 + 0/7 + 0/3) = 0/5 \Rightarrow \frac{1}{\theta+1} \simeq 0/5 \Rightarrow \tilde{\theta}_{mm} = 1$$

روش برآورد ماکزیمم درستنمایی (روش M.L.E):

ابتدا تابع $L(\theta)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که به آن تابع درستنمایی می‌گویند.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

برای بدست آوردن برآورد θ با استفاده از این روش باید تابع درستنمایی را ماکزیمم کنیم.

مثال ۵: فرض کنید $X \sim B(n,p)$ در صورتیکه بدانیم $n \in \{2, 3\}$, $p \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ برآورد M.L زوج (n, p) را بدست آورید.

☑ **پاسخ:** جدول زیر جدول تابع احتمال برای هر زوج (n,p) است توجه داشته باشید که در صورتیکه از یک نمونه تصادفی یا یک نمونه یکتایی استفاده شود تابع احتمال و تابع درستنمایی یکی هستند.

$X = x$	$(2, \frac{1}{2})$	$(2, \frac{1}{3})$	$(3, \frac{1}{2})$	$(3, \frac{1}{3})$	$Sup(n,p)L(n,p)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{8}$

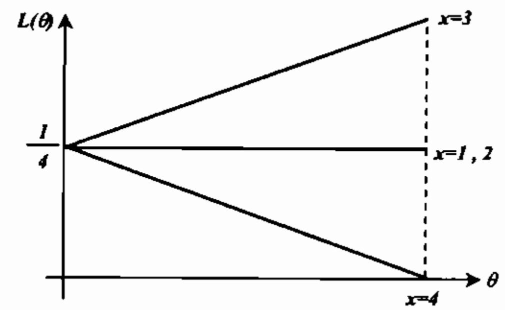
برآورد M.L های (n , p) به صورت زیر هستند:

$$(\hat{n},\hat{p})=\begin{cases}(2,\frac{1}{3}) & ; \quad x=0\\ (2,\frac{1}{2}) & ; \quad x=1\\ (3,\frac{1}{2}) & ; \quad x=2,3\end{cases}$$

مثال ۶: فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد M.L.E پارامتر θ را بدست آورید.

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & ; \quad x=1,2\\ \frac{1+\theta}{4} & ; \quad x=3 \qquad \theta\in[0,1]\\ \frac{1-\theta}{4} & , \quad x=4\end{cases}$$

☑ **پاسخ:** نمودار $L(\theta)$ به صورت زیر می‌باشد:



$$\hat{\theta}=\begin{cases}1 & x=3\\ a & x=1,2 \qquad ;a\in[0,1]\\ 0 & x=4\end{cases}$$

مثال ۷: فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد اگر $\theta=0$ باشد تابع چگالی x برابر است با: $f_\theta(x)=1 \quad 0<x<1$
و اگر $\theta=1$ باشد تابع چگالی x به صورت زیر می‌باشد:

$$f_\theta(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad 0<x<1$$

براساس فقط یک مشاهده برآورد حداکثر درستنمایی θ کدام است؟

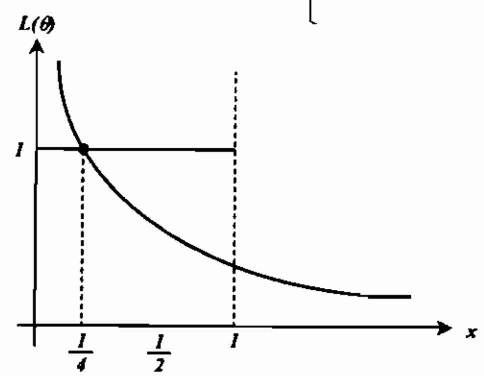
۱) $\hat{\theta}(x)=\begin{cases}1 & \frac{1}{4}\le x<1\\ 0 & 0\le x\le\frac{1}{4}\end{cases}$

۲) $\hat{\theta}(x)=\begin{cases}1 & \frac{1}{4}\le x<1\\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x\le\frac{1}{4}\end{cases}$

۳) $\hat{\theta}(x)=\begin{cases}0 & \frac{1}{4}\le x<1\\ 1 & 0<x\le\frac{1}{4}\end{cases}$

۴) $\hat{\theta}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{4}\le x<1\\ 1 & 0<x\le\frac{1}{4}\end{cases}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» شکل $L(\theta)$ را رسم می‌کنیم:



$$\frac{1}{2\sqrt{x}}=1\Rightarrow 2\sqrt{x}=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ اگر $0<x\le\frac{1}{4}\Rightarrow\hat{\theta}(x)=1$

$\Rightarrow$ اگر $\frac{1}{4}\le x<1\Rightarrow\hat{\theta}(x)=0$

مثال ۸: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر است براساس یک نمونه تصادفی nتایی برآورد ماکسیمم درستنمایی برای P کدام است؟

$$f(x_i,p)=\begin{cases}p(1-p)^{x-1} & x=1,2,\ldots\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

۱) $\bar{x}$ ۲) $\frac{1}{\bar{x}}$ ۳) $\bar{x}+1$ ۴) $\frac{1}{\bar{x}+1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تابع درستنمایی را ماکسیمم می‌کنیم.

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,p)=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{n\bar{x}-n}$$

$$\Rightarrow l'(p)=0\Rightarrow n\ln p+(n\bar{x}-n)\ln(1-p)=0\Rightarrow\frac{n}{p}+\frac{n-n\bar{x}}{1-p}=0\Rightarrow\frac{n-np+np-np\bar{x}}{p(1-p)}=0$$

$$\Rightarrow n=np\bar{x}\Rightarrow p=\frac{1}{\bar{x}}\Rightarrow\hat{p}=\frac{1}{\bar{x}}$$

مثال ۹: فرض کنید یافته‌های ۰/۶، ۰/۸، ۰/۱، ۰/۵ و ۰/۴ مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی ۵تایی از توزیعی با چگالی احتمال زیر باشد. برآورد حداکثر درست نمایی پارامتر θ کدام است؟

$$f_\theta(x)=\frac{2x}{1-\theta^2} \qquad \theta\le x<1$$

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۴۸ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۸

☑ **پاسخ:** گزینه «۱»

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{2\prod_{i=1}^{n}x_i}{(1-\theta^2)^n}$$

برای اینکه $L(\theta)$ نسبت به θ ماکزیمم شود باید $1-\theta^2$ مینیمم شود بنابراین θ باید ماکزیمم شود و با توجه به $\theta\le x$، ماکزیمم θ با مینیمم x برابر است یعنی $\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$$\hat{\theta}=\min(0/6,0/8,0/1,0/5,0/4)=0/1$$

مثال ۱۰: فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشد:

$$f(x_i,\theta)=\frac{1}{2}e^{\frac{-|x-\theta|}{2}}$$

$$-\infty<x<\infty \quad ; \quad -\infty<\theta<\infty$$

برآورد ماکزیمم درستنمایی (M.L.E) پارامتر θ کدام است؟

۱) میانگین نمونه ۲) میانه نمونه ۳) بزرگترین مقدار نمونه ۴) مد نمونه

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=(\frac{1}{2})^n.e^{-\frac{1}{2}\sum|x_i-\theta|}$$

$L(\theta)$ زمانی ماکزیمم است که مقدار $\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|$ مینیمم گردد و می‌دانیم که زمانی این اتفاق می‌افتد که $\theta=\text{med}(x_1,\ldots,x_n)$.

مثال ۱۱: *تابع جرم احتمال متغیر تصادفی x به صورت زیر است:*

$x \backslash \theta$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0/1
2	1	0/9

اگر $x=1$ مشاهده شده باشد برآورد M.L برای پارامتر θ عبارت است از:

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$x=1 \Rightarrow \max f(1,\theta)=0/1 \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۲: *برآورد حداکثر احتمال (M.L.E) برای θ در توزیع $f(x,\theta)=1,\ \theta-\frac{1}{2}<x<\theta+\frac{1}{2},\ \theta\in\mathbb{R}$ بر اساس یک نمونه تصادفی nتایی برابر است با:*

۱) $\theta \ge \min(X_i)-\frac{1}{2}\ ,\ \theta<\max(X_i)+\frac{1}{2}$ ۲) $\theta \ge \min(X_i)\ ,\ \theta<\max(X_i)$

۳) $\theta \ge \min(X_i)+\frac{1}{2}\ ,\ \theta<\max(X_i)-\frac{1}{2}$ ۴) $\theta \ge \min(X_i)-\frac{1}{2}\ ,\ \theta<\min(X_i)+\frac{1}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» اگر مرتب شده $X_1,X_2,\dots,X_n$ را با $y_1<y_2<\dots<y_n$ نشان دهیم، داریم:

$$\theta-\frac{1}{2}<y_1<y_2<\dots<y_n<\theta+\frac{1}{2}$$

$$\theta<\frac{1}{2}+y_1 \Rightarrow \theta<\frac{1}{2}+\min(X_i)$$

$$\theta>y_n-\frac{1}{2} \Rightarrow \theta>\max(X_i)-\frac{1}{2}$$

البته توجه شود در اینجا می‌توانیم یک برآوردگر M.L را به صورت $\hat{\theta}_1=\frac{1}{2}(X(1)+X(n))$ معرفی کنیم.

نکته ۱: خاصیت پایایی برآوردگر ML بصورت زیر است:

به ازای تابع پیوسته g داریم:

$$(\hat{g}(\lambda))_{ML}=g(\hat{\lambda}_{ML})$$

نکته ۲: برآورد حداکثر درستنمایی حافظ دامنه است در حالیکه برآوردگر گشتاوری دارای چنین خصوصیتی نیست.

تعریف نااریبی: برآوردکننده $\hat{\theta}$ را یک برآوردگر (تخمین‌زن) نااریب برای θ گویند اگر و تنها اگر $E(\hat{\theta})=\theta$

مثال ۱۳: *فرض کنید x_1 و x_2 و x_3 و x_4 یک نمونه تصادفی چهارتایی از یک جامعه با میانگین μ باشد از برآوردکننده‌های زیر کدامیک برآوردکننده نااریب (μ) با واریانس کمتر است؟*

۱) $\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$ ۲) $\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{6}$

۳) $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ ۴) $\frac{X_1-X_2+X_3-X_4}{2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$E\left(\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{6}\right)=\frac{\mu+2\mu+2\mu+\mu}{6}=\mu$$

$$Var\left(\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{6}\right)=\frac{\sigma^2+4\sigma^2+4\sigma^2+\sigma^2}{36}=\frac{5}{18}\sigma^2$$

$$E\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}\right)=\mu$$

$$Var\left(\frac{X_1+2X_2+2X_3+X_4}{4}\right)=\frac{4\sigma^2}{16}=\frac{\sigma^2}{4}$$

$$E\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)=\mu$$

$$Var\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)=\frac{\sigma^2}{3}$$

مثال ۱۴: *فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از یک جمعیت نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 می‌باشد اگر آماره $U=\sum_{i=1}^{n}x_i$ و $W=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ تعریف شود. آماره‌ای که برآوردکننده نااریب $5\sigma^2$ باشد برابر است با:*

۱) $\frac{5(W-\frac{U^2}{n})}{n-1}$ ۲) $\frac{5(W-U^2)}{n(n-1)}$ ۳) $\frac{5(W-nU^2)}{n-1}$ ۴) $\frac{5(W-U^2)}{n-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» یعنی برآوردن اریب $5\sigma^2$ برابر با $5S^2$ است.

$$E(S^2)=\sigma^2 \Rightarrow E(5S^2)=5\sigma^2$$

$$5S^2=5\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]=\frac{5(W-\frac{1}{n}U^2)}{n-1}$$

مثال ۱۵: *در یک جمعیت آماری میانگین آن μ (مجهول) و واریانس این جمعیت σ^2 معلوم می‌باشد. برای میانگین این جمعیت برآوردگر $U=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n+2}$ در نظر گرفته شده است آیا این برآوردگر برای μ نااریب است؟*

☑ **پاسخ:** طبق تعریف نااریبی:

$$E(U)=\frac{1}{n+2}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{n\mu}{n+2}$$

مقدار اریبی $B_U(\mu)=E_\mu(U)-\mu=\frac{n\mu}{n+2}-\mu=\frac{-2\mu}{n+2}$

گوئیم U بطور مجانبی برای μ نااریب است.

$$\lim_{n\to\infty} B_U(\mu)\to 0$$

میانگین توان دوم خطاها (M.S.E)

میانگین توان دوم خطاها به صورت روبرو تعریف می‌شود:

$$MSE(\hat\theta)=var(\hat\theta)+(\text{اریبی}(\hat\theta))^2$$

اگر $\hat\theta$ برای θ نااریب باشد، داریم:

$$MSE(\hat\theta)=var(\hat\theta)$$

مثال ۱۶: *فرض کنید $x_1,x_2,\dots,x_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. اگر $U=\bar X$، مقدار MSE برای برآورد U چقدر است؟*

۱) pq ۲) $\frac{pq}{n}$ ۳) np^2q^2 ۴) npq

پاسخ: گزینه «۲» $\bar X$ برای p نااریب است.

$$U=\bar X\Rightarrow E(\bar X)=p\Rightarrow MSE(U)=var(U)+(\text{اریبی}(u))^2=var(\bar X)+0=\frac{pq}{n}+0=\frac{pq}{n}$$

کارآیی: اگر U_n و V_n دو برآوردگر برای θ باشند، گوئیم U_n کاراتر از V_n است هرگاه:

$$MSE(U_n)<MSE(V_n)$$

مثال ۱۷: *فرض کنید $X_1,X_2,X_3\overset{iid}{\sim}N(\mu,4)$ باشد کدامیک از برآوردگرهای زیر کاراتر است؟*

$U=\bar X$

$V=3X_3-X_2-X_1$

۱) u ۲) V ۳) $2u$ ۴) $2u-V$

پاسخ: گزینه «۱» باید میانگین توان دوم خطاها را برای u و V بدست آوریم:

$$E(U)=E(\bar X)=\mu$$
$$E(V)=3\mu-\mu-\mu=\mu$$
$$var(U)=var(\bar X)=\frac{4}{3}$$
$$var(V)=9\,var(X_3)+var(X_2)+var(X_1)=44$$
$$\Rightarrow var(U)<var(V)\Rightarrow$$

U کاراتر از V است.

$$e(U,V)=\frac{Var(V)}{Var(U)}=\frac{44}{\frac{4}{3}}=33$$

U، ۳۳ برابر کاراتر از V است.

مثال ۱۸: *متغیر تصادفی x با میانگین μ و واریانس σ^2 مفروض است دو نمونه تصادفی مستقل با اندازه‌ای n_1 و n_2 دارای میانگین‌های $\bar X_1$ و $\bar X_2$ هستند. اگر بخواهیم واریانس $\bar X$ حداقل باشد a در عبارت $x=a\bar X_1+(1-a)\bar X_2$ که در آن $0<a<1$ است، برابر است با:*

۱) $\frac{n_2}{n_1+n_2}$ ۲) $\frac{n_1}{n_1+n_2}$ ۳) n_2 ۴) n_1

پاسخ: گزینه «۲»

$$Var(\bar X)=a^2Var(\bar X_1)+(1-a)^2Var(\bar X_2)$$
$$=a^2.\frac{\sigma^2}{n_1}+(1-a)^2\frac{\sigma^2}{n_2}=\sigma^2\left(\frac{a^2}{n_1}+\frac{(1-a)^2}{n_2}\right)\Rightarrow\frac{dVar(\bar X)}{da}=0$$
$$\Rightarrow\sigma^2\left(\frac{2a}{n_1}-\frac{2(1-a)}{n_2}\right)=0\Rightarrow an_2=n_1-an_1\Rightarrow a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$$

سازگاری: برآوردگر $\hat\theta$ را یک برآوردگر سازگار برای پارامتر θ گوئیم هرگاه $\lim_{n\to\infty}MSE(\hat\theta)=0$

مثال ۱۹: *اگر $X_1,X_2,\dots,X_n\overset{iid}{\sim}U(0,\theta)$; $\theta>0$ آیا برآوردگر $U=\max(X_1,X_2,\dots,X_n)$ در این توزیع برای θ سازگار است؟*

۱) بله ۲) خیر ۳) بستگی به مقدار θ دارد. ۴) نمی‌توان قضاوت کرد.

پاسخ: گزینه «۱» حد توان دوم خطاها را بدست می‌آوریم:

$$E(U_n)=E(\max(X_1,X_2,\dots,X_n))=\frac{n\theta}{n+1}\Rightarrow B_U(\theta)=E(U_n)-\theta\Rightarrow B_U(\theta)=\frac{-\theta}{n+1}$$
$$E(U)=\int_0^\theta\frac{y^2.ny^{n-1}}{\theta^n}dy=\frac{n\theta^2}{n+2}$$
$$var(U)=E(U)-E^2(U)=\frac{n\theta^2}{n+2}-\frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}=\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$
$$MSE(U)=var(U)+B_U^2(\theta)=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}+\frac{\theta^2}{(n+1)^2}$$
$$\lim_{n\to\infty}MSE(U)=0\Rightarrow$$

$U=\max(X_1,\dots,X_n)$ یک برآوردگر سازگار است.

برآوردهای فاصله‌ای (فاصله اطمینان)

فاصله اطمینان برای میانگین جامعه

الف ـ اگر واریانس جامعه معلوم باشد.

اگر توزیع جامعه نرمال باشد تابع محوری ما دارای توزیع Z می‌باشد.

$$Z=\frac{\bar x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}\Rightarrow P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt n}}<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

بنابراین یک فاصله اطمینان $\%100(1-\alpha)$ برای μ به صورت زیر می‌باشد.

$$\left(\bar x-z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt n},\bar x+z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt n}\right)$$

نکته ۳: اگر جامعه نرمال نباشد ولی $n\geq 30$ در اینصورت فاصله اطمینان فوق به طور تقریبی مورد قبول است.

نکته ۴: به مقدار $z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt n}$ خطای برآورد گفته می‌شود که با توجه به حداکثر خطای تعیین شده می‌توان حجم نمونه را از رابطه $n\geq\frac{z^2_{\frac{\alpha}{2}}.\sigma^2}{e^2}$ بدست آورد.

ب ـ اگر واریانس جامعه نامعلوم باشد:

اگر توزیع جمعیت نرمال باشد تابع محوری دارای توزیع T می‌باشد. یعنی به جای واریانس جامعه از برآوردکننده آن یعنی s^2 استفاده می‌کنیم.

$$T_{(n-1)}=\frac{\bar x-\mu}{\frac{S}{\sqrt n}}$$

یک فاصله اطمینان $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای μ به صورت زیر خواهد بود.

$$(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{۲},n-۱}.\frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{۲},n-۱}.\frac{S}{\sqrt{n}})$$

$$S^۲=\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^۲=\frac{۱}{n-۱}\left[\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲-\frac{۱}{n}(\sum_{i=۱}^{n}x_i)^۲\right]$$

نکته۵: اگر $n\ge ۳۰$ باشد توزیع T و Z تقریباً یکسان هستند ولی اگر حجم نمونه کوچک $(n<۳۰)$ و توزیع جامعه نرمال نباشد در این صورت از متغیر $k=\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ استفاده می‌کنیم.

$$(\bar{x}-\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}.\frac{S}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}.\frac{S}{\sqrt{n}})$$

***مثال ۲۰:** فرض کنید می‌خواهیم متوسط آگاهی دانشجویان را نسبت به مسائل جاری اقتصادی با نمره یک آزمون تستی برآورد کنیم. همچنین می‌خواهیم ۹۵٪ اطمینان داشته باشیم که بیشتر از ۲/۵ نمره خطا نداشته باشیم با فرض آنکه بدانیم واریانس آگاهی دانشجویان ۱۰۰ می‌باشد، حداقل حجم نمونه لازم کدام است؟*

۱) ۶۲ ۲) ۷۵ ۳) ۷۷ ۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه «۱»

$$۱-\alpha=۰/۹۵\ ;\ \varepsilon=۲/۵\ ;\ \sigma_x^۲=۱۰۰$$

$$۱-\frac{\alpha}{۲}=۰/۹۷۵\Rightarrow z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}=۱/۹۶$$

$$n\ge\frac{z^۲_{۱-\frac{\alpha}{۲}}.\sigma^۲}{\varepsilon^۲}=\frac{(۱/۹۶)^۲\times ۱۰۰}{(۲/۵)^۲}\approx ۶۲$$

***مثال ۲۱:** در یک کارخانه تولیدی اتومبیل تحقیقی پیرامون متوسط زمان جمع کردن جعبه دنده صورت گرفته است. نمونه‌ای تصادفی انتخاب شده به صورت زیر ثبت شده است. با فرض آنکه مدت زمان سرهم کردن جعبه دنده دارای توزیع نرمال با انحراف معیار ۰/۳ ساعت باشد فاصله اطمینان ۹۸٪ را برای متوسط زمان کل جمع کردن جعبه دنده بدست آورید. اگر واریانس داده نشده باشد فاصله اطمینان به چه صورت است؟*

۳/۱ ، ۳/۸ ، ۳/۵ ، ۴ ، ۴/۲ ، ۳/۶

۱) (۴/۲۳ و ۳/۱۶) ۲) (۲/۲۵ و ۱/۷۵) ۳) (۱/۵ و ۰) ۴) (۳/۰۹ و ۳)

پاسخ: گزینه «۱»

$$\bar{x}\pm z_{\frac{\alpha}{۲}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ :\ ۳/۷\pm(۲/۳۲۶).\frac{۰/۳}{\sqrt{۶}}\Rightarrow(۳/۴۱,۳/۹۸)$$

$$\bar{x}=\frac{۳/۱+۳/۸+۳/۵+۴+۴/۲+۳/۶}{۶}=۳/۷$$

اگر واریانس معلوم نباشد:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=۳/۷$$

$$S^۲=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^۲}{n-۱}=۰/۱۵۲\Rightarrow S=۰/۳۸$$

$$\bar{x}\pm t_{n-۱,\frac{\alpha}{۲}}.\frac{S}{\sqrt{n}}=۳/۷\pm(۳/۳۶)\frac{۰/۳۸۹}{۲/۴۴}\Rightarrow(۳/۱۶,۴/۲۳)$$

فاصله اطمینان برای تفاضل میانگین دو جامعه

الف ـ واریانس دو جامعه معلوم است: اگر از دو جامعه‌ی نرمال به طور مستقل نمونه‌هایی با حجم‌های $n_۱$ و $n_۲$ و میانگین‌های $\bar{x}_۱$ و $\bar{x}_۲$ داشته باشیم، در این صورت:

$$Z=\frac{(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲)-(\mu_۱-\mu_۲)}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}}$$

$$E(\bar{X}_۱-\bar{X}_۲)=\mu_۱-\mu_۲$$

$$Var(\bar{X}_۱-\bar{X}_۲)=Var(\bar{X}_۱)+Var(\bar{X}_۲)=\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}$$

یک فاصله اطمینان برای تفاضل دو میانگین یعنی $\mu_۱-\mu_۲$ به صورت زیر است:

$$(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲-Z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}\ ,\ \bar{x}_۱-\bar{x}_۲+Z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}})$$

نکته۶: اگر دو جامعه نرمال نباشند اما $n_۱\ge ۳۰$ و $n_۲\ge ۳۰$ می‌توان از رابطه بالا به طور تقریبی استفاده کرد.

***مثال ۲۲:** یک نمونه ۱۵۰ تایی از لامپ روشنایی نوع (A) با میانگین طول عمر ۱۴۰۰ ساعت و انحراف معیار ۱۲۰ ساعت وجود دارد و یک نمونه ۱۰۰ تایی از لامپ روشنایی (B) با میانگین طول عمر ۱۲۰۰ ساعت و انحراف معیار ۸۰ ساعت وجود دارد. یک فاصله اطمینان ۹۹٪ برای اختلاف میانگین طول عمرها کدام است؟*

۱) (۱۶۰,۱۸۰) ۲) (۱۵۱,۲۰۲) ۳) (۱۶۷,۲۳۳) ۴) (۱۹۰,۲۱۰)

پاسخ: گزینه «۳» طبق رابطه بالا:

$$\bar{x}_A-\bar{x}_B\pm Z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{\sigma_A^۲}{n_A}+\frac{\sigma_B^۲}{n_B}}$$

$$۱۴۰۰-۱۲۰۰\pm ۲/۵۸\sqrt{\frac{(۱۲۰)^۲}{۱۵۰}+\frac{(۸۰)^۲}{۱۰۰}}\Rightarrow(۱۶۷,۲۳۳)$$

ب ـ اگر واریانس دو جامعه نامعلوم باشد:

اگر $n_۱,n_۲\ge ۳۰$، باشد در اینصورت فاصله اطمینان به صورت زیر خواهد بود:

$$(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲-Z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{S_۱^۲}{n_۱}+\frac{S_۲^۲}{n_۲}}\ ,\ \bar{x}_۱-\bar{x}_۲+Z_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{S_۱^۲}{n_۱}+\frac{S_۲^۲}{n_۲}})$$

اکنون اگر نمونه‌ها کوچک باشند فاصله اطمینان به صورت زیر خواهد شد.

$$(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲-t_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{S_۱^۲}{n_۱}+\frac{S_۲^۲}{n_۲}}\ ,\ \bar{x}_۱-\bar{x}_۲+t_{\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{S_۱^۲}{n_۱}+\frac{S_۲^۲}{n_۲}})$$

ج ـ واریانس دو جامعه نامعلوم اما مساوی باشند: ($n_۱,n_۲<۳۰$ و دو جامعه نرمال باشند)

فاصله اطمینان به صورت زیر خواهد بود:

$$(\bar{x}_۱-\bar{x}_۲-t_{\frac{\alpha}{۲},n}S_p\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}}\ ,\ \bar{x}_۱-\bar{x}_۲+t_{\frac{\alpha}{۲},n}\sqrt{\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}})$$

$$S_p^۲=\frac{(n_۱-۱)S_۱^۲+(n_۲-۱)S_۲^۲}{n_۱+n_۲-۲}\qquad n=n_۱+n_۲-۲$$

به $S_p^۲$ واریانس آمیخته گفته می‌شود.

مثال ۲۳: دو نوع گیاه برای کاشت در یک منطقه مورد آزمایش قرار می‌گیرند. جهت انجام آزمایش، این دو نوع گیاه در ۵۰ هکتار زمین کشت شده و در شرایط یکسان نگهداری شده است. پس از طی زمان مورد نظر متوسط محصول نوع اول ۷۸/۳ تن در هکتار با انحراف معیار ۵/۶ تن و متوسط محصول نوع دوم ۸۷/۲ تن در هکتار با انحراف معیار ۶/۳ تن بدست آمد. با فرض اینکه توزیع محصول برای دو نوع نرمال باشد، فاصله اطمینان ۹۵% برای تفاوت متوسط واقعی محصول در دو نوع بدست آورید (واریانس‌ها را برابر فرض می‌کنیم)

☑ **پاسخ:** چون حجم جامعه بزرگ است به جای t از Z استفاده می‌کنیم.

$$L=(\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$$

$$\Rightarrow S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{(50-1)\times 31/36+(50-1)\times 39/69}{50+50-2}\Rightarrow n=n_1+n_2-2=50+50-2=98$$

$$=(78/3-87/2\pm 1/96\sqrt{35/52(\frac{1}{50}+\frac{1}{50})})=(-11/2\,,6/56)$$

مثال ۲۴: دو نمونه تصادفی از دو جامعه نرمال مستقل از یکدیگر با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و واریانس‌های مساوی به صورت زیر حاصل شده است:

نمونه ۱	۱۴	۱۵	۱۹
نمونه ۲	۱۸	۱۶	

یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای $\mu_2-\mu_1$ کدام است؟

v	۱	۲	۳	۴
$t_{0/05}(v)$	۶/۳	۲/۹	۲/۴	۱/۲
$t_{0/025}(v)$	۱۲/۷	۴/۳	۳/۲	۲/۸

۱) $[-5/7,7/7]$ ۲) $[-7/7,5/7]$ ۳) $[-6,4]$ ۴) $[-4,6]$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق رابطه بالا داریم:

$$\begin{cases}n_1=3\\ n_2=2\end{cases}\Rightarrow n=n_1+n_2-2=3+2-2=3$$

$$1-\alpha=0/95\Rightarrow\alpha=0/05\Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2},n}=t_{0/025,3}=3/2$$

$$\bar{x}_1=16\quad,\quad S_1^2=7\quad,\quad n_1=3$$

$$\bar{x}_2=17\quad,\quad S_2^2=2\quad,\quad n_2=2$$

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{14+2}{3}=\frac{16}{3}\Rightarrow S_p=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\mu_1-\mu_2\in[\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm t_{\frac{\alpha}{2},n}.S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]$$

$$\mu_1-\mu_2\in[16-17\pm 3/2\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}]=[-7/7,5/7]$$

فاصله اطمینان برای واریانس یک جامعه:

از یک جامعه نرمال با واریانس σ^2 یک نمونه تصادفی به اندازه n انتخاب می‌کنیم. در اینصورت یک فاصله اطمینان برای واریانس جامعه σ^2 به صورت زیر خواهد بود:

$$(\mu \text{ مجهول}\ ,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2)\qquad (\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}})$$

اما اگر μ معلوم باشد، تحت شرایط قبلی فاصله اطمینان بصورت زیر خواهد بود:

$$(S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2)\qquad (\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}},\frac{ns^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}})$$

مثال ۲۵: نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال به حجم ۱۰ انتخاب شده است که به صورت زیر می‌باشند. یک فاصله اطمینان ۹۸% برای واریانس جامعه بدست آورید.

۳ / ۲,۵ / ۳,۳ / ۵,۲ / ۲,۳ / ۴,۳,۳ / ۶,۲,۳ / ۸

☑ **پاسخ:**

$$S^2=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{3/3}{9}=0/37\Rightarrow S=\sqrt{0/37}=0/61$$

$$\left(\frac{(10-1)0/37}{21/67},\frac{(10-1)0/37}{2/09}\right)=(0/157\,,\,1/59)$$

مقادیر $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ و $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ از جدول کای دو بدست می‌آیند.

فاصله اطمینان برای نسبت واریانس دو جامعه آماری:

از دو جامعه آماری نرمال با واریانس‌های σ_1^2 و σ_2^2 دو نمونه n_1 تایی و n_2 تایی، واریانس‌های S_1^2 و S_2^2 گرفته‌ایم یک فاصله اطمینان برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$(\frac{S_1^2}{S_2^2}.f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1),\frac{S_1^2}{S_2^2}.f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1))$$

توجه:
$$f_{\frac{\alpha}{2},(n_1-1,n_2-1)}=\frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2},(n_2-1,n_1-1)}}$$

مثال ۲۶: بخش ریاضی یک کالج دو نوع امتحان ریاضی برای انتخاب دانشجو برگزار کرده است. کلیه متقاضیان در یکی از دو امتحان شرکت کرده‌اند. سپس برای ارزیابی پراکندگی نمرات دو گروه از هر گروه تعدادی نمونه به طور تصادفی گرفته شد. نتیجه به صورت زیر خواهد بود. یک فاصله اطمینان ۹۰% برای نسبت واریانس دو گروه بدست آورید.

امتحان	n	S^2
A	۱۲۱	۱۲۱
B	۱۶	۶۴

۱) (۰/۸۹,۱/۲۵) ۲) (۰/۸۹,۲) ۳) (۰/۸۹,۳/۱۵) ۴) (۰/۲۷,۳/۹)

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2},(n_1-1,n_2-1)}}\ ,\ \frac{S_1^2}{S_2^2}.f_{\frac{\alpha}{2},(n_2-1,\,n_1-1)}\right)=\left(\frac{121}{64}\cdot\frac{1}{2/11}\ ,\ \frac{121}{64}.1/67\right)=(0/89\,,3/15)$$

فاصله اطمینان برای نسبت یک جامعه

اگر P نسبت موفقیت در جامعه باشد و نمونه‌ای از جامعه به حجم n انتخاب کنیم در این صورت اگر تعداد موفقیت‌ها در این نمونه n تایی برابر با x باشد آنگاه $\hat{P}=\frac{x}{n}$ یک برآورد برای P می‌باشد.

با توجه به مطلب بالا یک فاصله اطمینان برای نسبت موفقیت در جامعه به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\hat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}\ ,\ \hat{P}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}\right)\ ;\ \hat{q}=1-\hat{p}$$

مثال ۲۷: برای بررسی تأثیر یک آزمایش خاص در خروجی تولید یک کارخانه بخش کنترل کیفیت کارخانه نمونه‌ای ۱۵۰۰ تایی به طور تصادفی گرفته تا نسبت تولیدات را با توجه به آزمایش خاص محاسبه کند. نسبت تولیدات سالم ۰/۵۲ بوده است. با توجه به اطلاعات مسئله یک فاصله اطمینان ۹۵% برای نسبت بدست آورید.

☑ **پاسخ:**

$$\begin{matrix}\hat{P}=0/52\\ \hat{q}=0/48\end{matrix}\Rightarrow 0/52\pm 1/96\sqrt{\frac{0/52\times 0/48}{1500}}\Rightarrow(0/495\,,\,0/545)$$

مثال ۲۸: اگر $\hat{P}$ برآورد کننده پارامتر P توزیع دو جمله‌ای باشد و بخواهیم دست کم $100(1-\alpha)\%$ اطمینان داشته باشیم که حداکثر قدرمطلق تفاوت P و $\hat{P}$ برابر e می‌باشد در اینصورت تعداد نمونه لازم برای محاسبه $\hat{P}$ برابر است با:

۱) $\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2.\hat{P}(1-\hat{P})}{e^2}$ ۲) $\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4e^2}$ ۳) $\frac{Z_{\alpha}^2}{4e^2}$ ۴) $\frac{Z_{\alpha}^2\hat{P}(1-\hat{P})}{e^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$|P-\hat{P}|\le e\Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}\hat{q}}{n}}\le e\Rightarrow n\ge\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2\,\hat{P}(1-\hat{P})}{e^2}$$

اما برای اینکه حداقل $100(1-\alpha)\%$ مطمئن باشیم باید $\hat{P}(1-\hat{P})$ ماکزیمم شود.

$$\hat{P}=1-\hat{P}\Rightarrow\hat{P}=\frac{1}{2}\Rightarrow n\ge\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{4e^2}$$

فاصله اطمینان برای تفاضل نسبت موفقیت در دو جامعه

اگر P_1 و P_2 نسبت‌های موفقیت در دو جامعه باشند و دو نمونه تصادفی مستقل به حجم‌های n_1 و n_2 از دو جامعه اختیار کنیم و تعداد موفقیت‌ها در دو نمونه به ترتیب برابر با x_1 و x_2 باشد در اینصورت یک فاصله اطمینان برای تفاضل نسبت‌های دو جامعه به صورت زیر می‌باشد:

$$\left(\hat{P}_1-\hat{P}_2-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}}\ ,\ \hat{P}_1-\hat{P}_2+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{P}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right)\qquad \hat{P}_1=\frac{x_1}{n_1}\,,\ \hat{P}_2=\frac{x_2}{n_2}$$

مثال ۲۹: از یک نمونه تصادفی ۵۶۰ تایی از محصولات تولید شده در شیفت اول یک کارخانه ۱۴ تای آن خراب هستند. یک نمونه ۵۱۰ تایی از محصولات تولید شده در شیفت دوم قرار گرفته می‌شوند. اگر بدانیم یک فاصله اطمینان ۹۵% برای تفاضل نسبت‌های واقعی محصولات معیوب تولید شده شیفت اول از شیفت دوم برابر (۰/۰۱۲-, ۰/۰۲۸) باشد. تعداد محصولات معیوب در نمونه شیفت دوم چقدر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۷ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲»

$$\hat{P}_2-\hat{P}_1\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

$$\hat{P}_2-\hat{P}_1=\frac{-0/012+0/028}{2}=0/008$$

$$\Rightarrow\ \hat{P}_2=\hat{P}_1+0/008=\frac{14}{560}+0/008=0/033\ \Rightarrow\ \frac{x_2}{510}=0/033\ \Rightarrow\ x_2=17$$

تستهای فصل پنجم

۱ـ بهترین معیار برای مقایسه دقت یک برآوردگر ...... است. (مؤلف)

۱) کارآیی ۲) اریبی ۳) میانگین توان دوم خطاها ۴) هیچکدام

۲ـ یک برآوردگر M.L برای پارامتر 2θ در توزیع $U(0,\theta)$ کدام است؟ (مؤلف)

۱) $\overline{X}$ ۲) $2\overline{X}$ ۳) $X_{(n)}$ ۴) $2X_{(n)}$

۳ـ در توزیع پواسن برآوردگر M.L برای $P(X=1)$ کدام است؟ (مؤلف)

۱) $e^{-\overline{X}}$ ۲) $\overline{X}e^{\overline{X}}$ ۳) $\overline{X}e^{-\overline{X}}$ ۴) $\overline{X}$

۴ـ توزیع تابع محوری $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ در فاصله اطمینان واریانس یک جامعه .... است. (مؤلف)

۱) t ۲) Z ۳) $\chi^2_{(n)}$ ۴) $\chi^2_{(n-1)}$

۵ـ کدام گزینه زیر صحیح است؟ (مؤلف)

۱) تمام برآورد کنندههای MLE نااریب میباشند.
۲) تمام برآورد کنندههای (MLE) دارای واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ میباشند.
۳) تمام برآورد کنندههای MLE در حد سازگارند.
۴) ۱ و ۳ هر دو صحیح میباشند.

۶ـ پهنای قالبهای میلههای آلومینیومی دارای توزیع نرمال $\mu = 0/9000$ و $\sigma = 0/0030$ است. اگر حد مجاز تعیین شده برای پهنا برابر با $0/9000 \pm 0/005$ باشد چه درصدی از قالبها معیوب هستند؟ (مؤلف)
($P(z<-1/67)=0/047$ و $P(z>1/67)=0/95$)

۱) ۹۰/۵ ۲) ۹/۵ ۳) ۹۹ ۴) ۹/۹

۷ـ در یک نمونه ۱۶ تایی با انحراف معیار ۲/۲ یک فاصلهی اطمینان ۹۹% برای σ^2 کدام است؟ (مؤلف)
$\chi^2_{0/995} = 4/60, \chi^2_{0/005} = 32/08$

۱) (۲/۲۶ ,۱۵/۷۸) ۲) (۳/۲۴ ,۱۰/۵۷) ۳) (۰,۱۲/۵) ۴) (۷/۸۲ ,۱۵/۲۶)

۸ـ فرض کنید x دارای توزیع نمایی با میانگین θ باشد تابع حداکثر درستنمایی این توزیع کدام است؟ (مؤلف)

۱) $L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{x}{\theta^n}}$ ۲) $L(\theta)=\theta e^{-\theta\sum x_i}$ ۳) $L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}e^{\frac{-\sum x_i}{\theta}}$ ۴) $L(\theta)=\theta e^{-\theta x^n}$

۹ـ متغیر تصادفی x پارامترهای مجهول μ، σ^2 مفروض است. به منظور برآورد کردن σ^2 یک نمونه تصادفی n تایی برگرفته و متغیر تصادفی $\hat{S}^2$ را به صورت زیر تعریف میکنیم $\hat{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ حال کدام گزینه صحیح است؟ (مؤلف)

۱) $\hat{s}^2$ یک تخمین زننده، نااریب برای σ^2 میباشد.
۲) $\hat{s}^2$ کاراترین تخمین زننده برای σ^2 میباشد.
۳) مقدار تورش این تخمین زننده مثبت میباشد.
۴) $\hat{s}^2$ یک تخمین زننده نااریب مجانبی است.

۱۰ـ با مفروض بودن یک نمونه n تایی از جامعهای با چگالی $0<x<1$ $f(x,\theta)=(\theta+1)x^\theta$ برآورد کنندهای برای θ به روش گشتاورها کدام است؟ (مؤلف)

۱) $\hat{\theta}=\frac{1-\bar{x}}{2\bar{x}-1}$ ۲) $\hat{\theta}=\frac{2\bar{x}}{1-\bar{x}}$ ۳) $\hat{\theta}=2\bar{x}-1$ ۴) $\hat{\theta}=\frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}$

پاسخنامه تستهای فصل پنجم

۱ـ گزینه «۳»

$$MSE(\theta)=Var(\theta)+bias^2(\theta)$$

۲ـ گزینه «۴»

$$\hat{\theta}=X_{(n)} \Rightarrow 2\hat{\theta}=\widehat{2\theta}=2X_{(n)}$$

۳ـ گزینه «۳»

$$P(X=1)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda}{1!}=\lambda e^{-\lambda} \Rightarrow \hat{\lambda}=\overline{X} \Rightarrow \hat{P}(X=1)=\overline{X}e^{-\overline{X}}$$

۴ـ گزینه «۴»

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

۵ـ گزینه «۴»

۶ـ گزینه «۲»

$$P(\text{سالم})=P(0/8950<X<0/9050)=P\left(\frac{0/8950-0/9}{0/0030}<Z<\frac{0/9050-0/9}{0/0030}\right)=P(-1/67<Z<1/67)$$
$$=0/905 \Rightarrow P(\text{معیوب})=1-P(\text{سالم})=1-0/905=0/095 \Rightarrow 9/5\%$$

۷ـ گزینه «۱»

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)=(2/26,15/87)$$

۸ـ گزینه «۳»

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum xi}{\theta}}$$

۹ـ گزینه «۴»

۱۰ـ گزینه «۴»

$$E(X)=\int_0^1 x.(\theta+1)x^\theta dx=(\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}dx=(\theta+1).\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\Big|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$
$$m_1=\overline{X} \Rightarrow E(X)=\overline{X} \Rightarrow \frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X} \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$$

آزمون فصل پنجم

۱ـ فرض کنید $x \sim U(\theta, 4)$ می‌باشد آنگاه تخمین زننده θ به روش گشتاورها کدام است؟

۱) $\bar{x}$ ۲) $\bar{x} - 8$ ۳) $2\bar{x} - 4$ ۴) $2\bar{x} - 8$

۲ـ فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه n تایی از جامعه نرمال با میانگین معلوم μ و واریانس σ^2 می‌باشد حال کدام تابع توزیع نمونه‌ای زیر (آماره) یک تخمین زننده نا اریب برای σ^2 می‌باشد؟

۱) $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ ۲) $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n+1}$ ۳) $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$ ۴) $T = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n-1}$

۳ـ به منظور برآورد فاصله یکطرفه برای نسب (p) یک صفت در جامعه براساس یک نمونه ۳۶ تایی مقدار ۰/۴ برآورد شده است و قصد داریم این برآورد فاصله‌ای را طوری پایه‌گذاری کنیم که با اطمینان ۹۵% حد بالا شامل این نسبت واقعی جامعه گردد حال حد بالای این تخمین فاصله‌ای کدام است؟

۱) ۰/۵۶ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۵۳ ۴) ۰/۲۷

۴ـ فرض کنید $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ یک نمونه سه تایی از یک توزیع دو جمله‌ای با پارامتر $B(4, \theta)$ می‌باشد حال تابع حداکثر درستنمایی این تابع به ازای x_1, x_2, x_3 کدام است؟

۱) $24\theta^6(1-\theta)^2$ ۲) $10\theta^{5(1-\theta)^7}$ ۳) $24\theta^7(1-\theta)^5$ ۴) $24\theta^5(1-\theta)^7$

۵ـ در سئوال قبل فرض کنید برای برآورد σ^2 تخمین زننده $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ را در نظر گرفته‌ایم آنگاه MSE برای $\hat{\sigma}^2$ کدام است؟

۱) $\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$ ۲) $\frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2} + \frac{(n-1)\sigma^2}{n^2}$

۳) $\frac{\sigma^4(2n+1)}{n^2}$ ۴) $\frac{2(n-1)\sigma^6}{n^3}$

۶ـ فرض کنید تابع نمونه‌ای $\hat{\theta} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تخمین زننده‌نااریب برای پارامتر مجهول θ می‌باشد در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\hat{\theta}^2$ برای θ^2 اریب است. ۲) $\hat{\theta}^2$ برابر $\hat{\theta}$ نااریب است.

۳) $\hat{\theta}^2$ در برخی موارد برای θ^2 می‌تواند اریب و گاهی نااریب باشد. ۴) بستگی به شکل تابع دارد.

۷ـ فرض کنید به منظور تخمین فاصله‌ای برای واریانس یک جامعه نرمال بامیانگین مجهول یک نمونه ۱۰ تایی انتخاب گرد و σ^2 را محاسبه می‌کنیم حال کدام گزینه زیر می‌تواند بیانگر این تخمین فاصله‌ای باشد؟

۱) $\frac{9s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},9}} \le \sigma^2 \le \frac{9s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},9}}$ ۲) $\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},9}} \le \sigma^2 \le \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},9}}$

۳) $\frac{9s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},9}} \le \sigma^2 \le \frac{9s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},9}}$ ۴) گزینه ۱ و ۲ هر دو صحیح می‌باشند.

۸ـ فرض کنید x تعداد آزمایش‌های لازم برای رسیدن به اولین موفقیت دارای توزیع هندسی با پارامتر مجهول θ می‌باشد تخمین زننده θ با استفاده از روش گشتاوری کدام است؟

۱) $\hat{\theta} = \bar{x}$ ۲) $\hat{\theta} = \bar{x} - 1$ ۳) $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$ ۴) $\hat{\theta} = \frac{1}{x} + 1$

۹ـ فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $P(\lambda)$ و $\lambda > 0$ باشد برآورد M.L برای $P(x_1 \le 1)$ کدام است؟

۱) $e^{-\bar{x}}$ ۲) $e^{-\bar{x}}(1+\bar{x})$ ۳) $e^{-\bar{x}}(1-\bar{x})$ ۴) $e^{-\bar{x}}(1-\bar{x}^2)$

۱۰ـ در سؤال قبل آیا $\bar{X}$ برآوردی سازگار است؟

۱) بله ۲) خیر

۳) اگر $\lambda = 0$ باشد، بلی ۴) شرط لازم برقرار ولی کافی برقرار نیست.

آزمون (۱)

تعداد سئوالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه** **سطح آزمون: A**

۱ـ چند نفر بایستی در یک اطاق حضور داشته باشند تا احتمال حداقل دو نفر از آنها تولدشان را در یک ماه جشن بگیرند بیش از $\frac{1}{2}$ باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت روی بازده $(-1,1)$ است، مقدار احتمال $P\left[\frac{\sin \pi x}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳ـ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای چگالی توأم $f(x,y) = 8e^{-2(x+2y)}_{\substack{x>0\\y>0}}$ باشد $E(X \mid Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۲-

۴ـ فرض کنید X دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ است. و توزیع شرطی Y به شرط $X = x$ نرمال با میانگین X و واریانس X است واریانس Y برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳/۵

۵ـ هرگاه برای دو متغیر X و Y، $Y = aX + b$ و a منفی باشد ضریب همبستگی بین X و Y برابر است با:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) هیچکدام

۶ـ هرگاه $X \mid Y$ دارای توزیع پواسن با پارامتر Y و $Y \sim \pi(1,1)$ باشد $E(X)$ برابر است با:

۱) $\frac{5}{8}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۷ـ توزیع توأم دو متغیر X و Y بصورت $f(x,y) = a^2 e^{-a(x+y)}_{\substack{x>0\\y>0}}$ است میانگین $X + Y$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{a}$ ۲) $\frac{1}{a^2}$ ۳) $\frac{2}{a}$ ۴) $\frac{1}{2a}$

۸ـ هرگاه $X_1, X_2, \dots, X_n$ از توزیع دو جمله‌ای باشند برآوردکننده نا اریب $\frac{1}{P}$ کدام است؟

۱) $\frac{n}{\overline{X}}$ ۲) $\frac{\overline{X}}{n}$ ۳) $\frac{1}{\overline{X}}$ ۴) وجود ندارد.

۹ـ در توزیع برنولی برآوردکننده ماکسیمم درستنمایی P کدام است؟

۱) $\overline{X}$ ۲) $\frac{2\overline{X}}{n+1}$ ۳) $\frac{n+1}{\overline{X}}$ ۴) $\frac{1}{\overline{X}}$

۱۰ـ توزیع توأم دو متغیر تصادفی X و Y به صورت $f(x,y) = xe^{-x(y+1)}$ و $x, y > 0$ تابع مولد گشتاور $Z = X.Y$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{(1-t)^2}$ ۲) $\frac{2}{1-t}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ ۴) $\frac{1}{1-t}$

آزمون (۲)

تعداد سئوالات: ۱۰ **مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه** **سطح آزمون: B**

۱ـ یک دستگاه تولیدکننده اعداد تصادفی، اعداد بین صفر و ۱ را با چگالی $f(x) = 1$ تولید می‌کند. اگر این دستگاه ۱۰۰ عدد تصادفی را تولید کند، احتمال اینکه حداقل ۵۰ تا از آنها بزرگتر از ۰/۵ باشند، کدام است؟

۱) ۰/۶۸ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴۷ ۴) ۰/۳۴

۲ـ متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-2X}}$ برای $x \in IR$ است میانه این توزیع کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۶/۵ ۴) صفر

۳ـ یک جفت تاس دو بار پرتاب می‌شود. احتمال اینکه در یکی از پرتابها مجموع ۷ و در دیگری مجموع ۱۱ بدست آید برابر است با:

۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{54}$ ۳) $\frac{1}{71}$ ۴) $\frac{1}{70}$

۴ـ اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی باشند و $\begin{cases} P(X_i = e^{-1}) = \frac{1}{2} \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$ و $P(X_i = e^2) = \frac{1}{2}$ مقدار $E(Ln\prod_{i=1}^{n} X_i)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2^n}$ ۲) $\frac{(e^3 - e)^n}{(2e)^n}$ ۳) $\frac{n}{2}$ ۴) $n - Ln\,n$

۵ـ فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی با پارامتر p باشند یعنی X_i ها مستقل‌اند مقدار $E(X_1 + X_2^2 + \dots + X_n^n)^2$ کدام است؟

۱) $np(1-p+np)$

۲) $n(p+p^2+\dots+p^n)^2$

۳) $(p+p^2+\dots+p^n)^2$

۴) $np(\frac{-p^n}{1-p})^2$

۶ـ اگر $Y \mid N$ دارای توزیع $\chi^2_{(2N)}$ و N دارای توزیع پواسن با پارامتر θ باشد در اینصورت $Var(Y)$ برابر است با:

۱) 8θ ۲) $4N$ ۳) 4θ ۴) $N\theta$

۷ـ فرض کنید دو عدد X و Y را به تصادف از فاصله $[0,1]$ انتخاب کنیم با فرض اینکه مجموع آنها در فاصلهٔ $[0,1]$ باشد احتمال پشامد $[XY > \frac{1}{2}]$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}Ln2$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}Ln2$

۸ـ متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس ۲ است $E(X^4)$ برابر است با:

۱) ۱۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۹ـ اگر تابع مولد گشتاور متغیری بصورت $(0/25e^t + 0/75)^5$ باشد احتمال $P(X \geq 1)$ برابر است با:

۱) $(0/25)^5$ ۲) $(0/75)^5$ ۳) $1-(0/75)^5$ ۴) ۱

۱۰ـ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $Beta(1,\theta+1)$ باشد برای $1 \leq K_1 \leq K_2 < n$ مقدار $E\left[\dfrac{\sum_{j=K_1}^{K_2} Ln(1-X_j)}{\sum_{i=1}^{n} Ln(1-X_j)}\right]$ کدام است؟

۱) $\dfrac{K_2-K_1+1}{n}$ ۲) $\dfrac{K_2-K_1+1}{(n+1)}$ ۳) $\dfrac{K_1+K_2}{n+1}$ ۴) $\dfrac{K_1-K_2}{n}$

آزمون (۳)

تعداد سئوالات : ۱۰ مدت زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه سطح آزمون: C

۱ـ فرض کنید n گوی در n جعبه به طریقی توزیع می‌شوند که n^n ترتیب ممکنه از شانسی مساوی برخوردار باشند. احتمال اینکه فقط جعبه شماره ۱ خالی باشد کدام است؟

۱) $\dfrac{(n-1)^n!}{n^n}$ ۲) $\dfrac{(n+1)!}{n^n}$ ۳) $\binom{n}{2}\dfrac{(n-1)!}{n^n}$ ۴) $\binom{n}{2}\dfrac{(n+1)!}{n^n}$

۲ـ ظرفی حاوی n توپ سفید و n توپ قرمز است. تعدد حالاتی که می‌توان از این ظرف n توپ انتخاب کرد برابر است با:

۱) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$ ۲) $\dfrac{(2n)!}{n!}$ ۳) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2$ ۴) $\sum_{K=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{k}$

۳ـ فرض کنید X_1 و X_2 و ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با توزیع مشترک $N(0,2)$ باشد زوج (a,b) چه مقداری باید باشند تا مقدار $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - a}{b}$ به توزیع نرمال استاندارد همگرا شود؟

۱) $(0,\sqrt{8n})$ ۲) $(0,\sqrt{6n})$ ۳) $(2n,\sqrt{8n})$ ۴) $(2n,\sqrt{6n})$

۴ـ فرض کنید $\theta \in \left[0,\frac{2}{3}\right]$ و مشاهده $x=\frac{1}{3}$ از چگالی زیر بدست آمده است:

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3} & x\in\{\theta,1+2\theta,2-3\theta\}\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

یک برآوردگر ماکسیمم درستنمایی برای θ عبارت است از:

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) هر عددی در $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) صفر

۵ـ ظرفی شامل ۵ مهره است که X تای آن سفید و بقیه سیاه هستند. می‌دانیم $P(X=3)=\frac{2}{3}$ و $P(X=2)=\frac{1}{3}$ از این ظرف یک مهره بیرون می‌کشیم ملاحظه می‌شود که رنگ آن سفید است احتمال آنکه در ظرف ۳ مهره سفید وجود داشته باشد کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۶ـ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots X_n$ نمونه تصادفی n تایی از چگالی $f_\theta(x)=\frac{1}{\theta}e^{\frac{-(x-\theta)}{\theta}}$ $x\geq\theta$ و $\theta>0$ برآورد گشتاوری θ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\overline{X}$ ۲) $X_{(1)}$ ۳) $\sum_{i=2}^{n}[X_i - X_{(1)}]$ ۴) $\max\{X_i\}$

۷ـ فرض کنید $X \sim NB(r,\theta)$ باشد، برآورد نا اریب $\frac{1}{\theta}$ کدام است؟

۱) $\frac{X}{r}$ ۲) $\frac{r}{X}$ ۳) $\frac{X-1}{r-1}$ ۴) وجود ندارد.

۸ـ فرض کنید X دارای توزیع $N(0,1)$ است. مقدار $P(X=a \mid X^2=a^2)$ چیست؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۹ـ متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع $F(x)$ است. اگر F تابعی اکیداً صعودی و $Y=F(x)$، آنگاه حاصل $P(Y-E(Y)<\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰ـ فرض کنید یک خانواده با احتمال Cp^n که $0<p<1$ و $n=0,1,2,\dots$ دارای n فرزند است متوسط تعداد فرزندان این خانواده برابر است با:

۱) $\frac{1-p}{p}$ ۲) np ۳) $\frac{p}{1-p}$ ۴) $1-p$

پاسخنامه آزمون‌های خودسنجی

آزمون (A)

۱ـ گزینه «۴» ۲ـ گزینه «۴» ۳ـ گزینه «۱» ۴ـ گزینه «۱» ۵ـ گزینه «۳»

۶ـ گزینه «۲» ۷ـ گزینه «۳» ۸ـ گزینه «۴» ۹ـ گزینه «۴» ۱۰ـ گزینه «۴»

آزمون (B)

۱ـ گزینه «۲» ۲ـ گزینه «۴» ۳ـ گزینه «۲» ۴ـ گزینه «۳» ۵ـ گزینه «۱»

۶ـ گزینه «۱» ۷ـ گزینه «۱» ۸ـ گزینه «۳» ۹ـ گزینه «۳» ۱۰ـ گزینه «۱»

آزمون (C)

۱ـ گزینه «۳» ۲ـ گزینه «۳» ۳ـ گزینه «۳» ۴ـ گزینه «۳» ۵ـ گزینه «۴»

۶ـ گزینه «۱» ۷ـ گزینه «۱» ۸ـ گزینه «۳» ۹ـ گزینه «۲» ۱۰ـ گزینه «۳»

سئوالات آزمون رشته مهندسی برق ـ سراسری ۸۵

۱ـ اگر X و Y، متغیرهای تصادفی دو جمله‌ای مستقل با پارامترهای یکسان n و P باشند، تابع چگالی احتمال شرطی X، به شرط $X+Y=m$، یعنی $P(X=k\ ,\ X+Y=m)$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{m}}$ ۲) $\dfrac{\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$ ۳) $\dfrac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$ ۴) $\dfrac{k}{m}$

۲ـ فرض کنید تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به صورت زیر باشد:

$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1+x_2\ ,\ 0<x_1<1\ ,\ 0<x_2<1 \\ 0\ ,\ \text{سایر جاها} \end{cases}$. در این صورت $P(X_1/X_2<2)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{19}{24}$ ۳) $\frac{5}{24}$ ۴) $\frac{17}{24}$

۳ـ اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و با توزیع یکسان (iid) باشند آنگاه $P(X>Y)$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) بستگی به توزیع X و Y دارد.

۴ـ فرض می‌کنیم تعداد اتومبیل‌های عبوری از مقابل یک دوربین عکاسی در بازه زمانی T، یک متغیر تصادفی پواسون با چگالی λ باشد، اگر دوربین عکاسی، مستقلاً با احتمال P از هر اتومبیل عکس بگیرد، میانگین تعداد عکس‌های گرفته شده در بازه زمانی T برابر است با:

۱) $P\lambda$ ۲) $P\lambda T$ ۳) PT ۴) $P^{\lambda T}$

پاسخنامه آزمون رشته مهندسی برق ـ سراسری ۸۵

۱ـ گزینه «۳» طبق رابطه شرطی:

$$P\{X=K|X+Y=m\}=\frac{P\{X=K,X+Y=m\}}{P\{X+Y=m\}}=\frac{P\{X=K,Y=m-K\}}{P\{X+Y=m\}}=\frac{P\{X=K\}.P\{Y=m-K\}}{P\{X+Y=m\}}$$

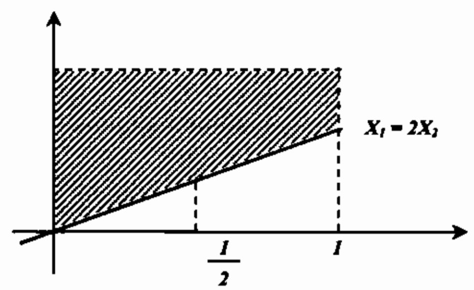
$$=\frac{\binom{n}{K}.P^{K}.(1-P)^{n-K}.\binom{n}{m-K}.P^{m-k}.(1-P)^{n-m+K}}{\binom{2n}{m}.P^{m}(1-P)^{2n-m}}=\frac{\binom{n}{K}\binom{n}{m-K}}{\binom{2n}{m}}$$

۲ـ گزینه «۲»

$$P(\frac{X_1}{X_2}<2)=P(X_1<2X_2)=1-\int_0^1\int_0^{\frac{x_1}{2}}(x_1+x_2)\,dx_2dx_1$$

$$=1-\int_0^1 \left.(x_1x_2+\frac{x_2^2}{2})\right|_0^{\frac{x_1}{2}}dx_1$$

$$=1-\int_0^1\frac{5x_1^2}{8}dx_1=1-\frac{5}{24}=\frac{19}{24}$$



۳ـ گزینه «۴» اگر X و Y پیوسته باشند:

$$P(X>Y)+P(X<Y)+P(X=Y)=1$$

$$P(X>Y)+(1-P(X>Y))=1\ \Rightarrow\ 2P(X>Y)=1\ \Rightarrow\ P(X>Y)=\frac{1}{2}$$

اما اگر X و Y گسسته باشند $P(X=Y)$ بستگی به توزیع X و Y بستگی دارد و نمی‌توان مقدار $P(X>Y)$ را بدست آورد.

۴ـ گزینه «۱»

$X:T$ تعداد اتومبیل‌های عبوری از مقابل یک دوربین در فاصله زمانی

$E(X)=\lambda\ \Rightarrow\ E(\text{تعداد عکسهای گرفته شده})=P\lambda$

سئوالات آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵

۱ـ فرض کنید در کیسه‌ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره آبی وجود دارد از این کیسه یک مهره را بیرون و بدون نگاه کردن به رنگ آن، آن را کنار می‌گذاریم، احتمال این که مهرهٔ دوم که از کیسه بیرون می‌آید سفید باشد چقدر است؟

۱) $\frac{3}{6}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

۲ـ فرض کنید X متغیری تصادفی است که دارای توزیع یکنواخت در فاصله $[0,1]$ است. از ۵ بار نمونه‌گیری احتمال این که دقیقاً ۳ بار در فاصلهٔ $[0/3, 0/8]$ قرار بگیرد برابر است با:

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{2}{32}$ ۳) $\frac{10}{32}$ ۴) $\binom{5}{2}\int_{0/3}^{0/8}\left(\frac{1}{2}\right)dx$

۳ـ فرض کنید X دارای توزیع نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۴ باشد. $E(e^{2X})$ برابر است با:

۱) e^{12} ۲) e^{16} ۳) e^{20} ۴) e^{22}

۴ـ احتمال این که فردی در یک امتحان رانندگی قبول بشود $\frac{1}{3}$ می‌باشد. احتمال این که این فرد برای قبول شدن حداقل ۳ بار امتحان دهد چقدر است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{27}$ ۳) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ۴) $\frac{19}{27}$

۵ـ فرض کنید X دارای توزیع پواسون با پارامتر m باشد. یک برآورد نا اریب برای m^2 برابر است با:

۱) $\frac{X}{2}$ ۲) X^2+X ۳) $\frac{X^2}{2}$ ۴) X^2-X

۶ـ فرض کنید X دارای چگالی $f(x)=\theta e^{-\theta x} \quad x>0 \quad \theta>0$ است. براساس یک نمونه تصادفی n تایی اگر بخواهیم فرض $H_0 : \theta \le \theta_0$ را در مقابل $H_1 : \theta > \theta_1$ آزمون نماییم ناحیه بحرانی عبارت است از:

۱) $\sum X_i \ge K$ ۲) $\sum X_i \le K$ ۳) $\sum(X_i-\overline{X})^2 \le K$ ۴) $\sum(X_i-\overline{X})^2 \ge K$

پاسخنامه آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵

۱ـ **گزینه «۴»** چون رنگ مهره مشاهده نشده پس احتمال $\frac{4}{7}$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۲ـ **گزینه «۳»**

توزیع دو جمله‌ای با $n=5$ و $P=\int_{0/3}^{0/8}\frac{1}{1-0}dx=0/5$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5!}{3!2!}\times\frac{1}{32}=\frac{10}{32}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ **گزینه «۲»** تابع مولد گشتاور توزیع نرمال عبارت است از:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=e^{(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2)} \Rightarrow E(e^{2X})=M_X(t)\Big|_{t=2}$$

$$t=2 \Rightarrow E(e^{2X})=e^{2\times2+\frac{1}{2}\times4\times4}=e^{12}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ **گزینه «۳»** باید در دو امتحان اول قبول نشود. بنابراین امتحان برابر $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ **گزینه «۴»**

$$E(X)=m\ ,\ V(X)=m$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X) \Rightarrow E(X^2)=m+m^2 \Rightarrow m^2=E(X^2)-E(X)=E(X^2-X)$$

بنابراین X^2-X یک برآورد نا اریب برای m^2 می‌باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ **گزینه «۲»** ناحیه بحرانی به صورت $\frac{L(\theta_0)}{L(_n\theta_1)} \le c$ می‌باشد. $(\theta_1>\theta_0)$

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}=\frac{\theta_0^n e^{-\theta_0}\sum x_1}{\theta_1^n e^{-\theta_1}\sum x_1}=\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)e^{(\theta_1-\theta_0)\sum x_1} \le c \Rightarrow e^{(\theta_1-\theta_0)\sum x_1} \le a \Rightarrow (\theta_1-\theta_0)\sum x_i \le Lna \Rightarrow \sum X_i \le K$$

◆ ◆ ◆ ◆

سئوالات آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۵

۱ـ اگر x و y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در فاصله $(0,1)$ باشند $P\left(y \ge x-\frac{1}{2}\right)$ کدام گزینه خواهد بود؟

۱) ۰/۱۲۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۸۷۵ ۴) ۰/۷۵

۲ـ جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۷ مهره قرمز، جعبه B شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره قرمز و جعبه C شامل ۵ مهره سفید ۵ مهره قرمز می‌باشند. یکی از جعبه‌ها را به طور تصادفی انتخاب نموده و یک مهره از آن انتخاب می‌کنیم احتمال قرمز بودن مهره چقدر است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵۳۳ ۳) ۰/۴۶۷ ۴) ۰/۶

۳ـ اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال $N(0,1)$ بوده و متغیر Y دارای توزیع نمایی $y>0$ و $f_Y(y)=2e^{-2y}$ باشد و همچنین کوواریانس X و Y برابر صفر باشد، ضریب کوواریانس متغیرهای $Z=X+Y$ و $W=X-Y$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) ۱

۴ـ تاسی را n بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه حداقل در یکی از پرتاب‌ها پیشامد زوج رخ دهد چقدر است؟

۱) $1-\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ۲) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ ۳) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ۴) $1-\left(\frac{1}{6}\right)^n$

۵ـ متغیرهای X و Y دارای توزیع پواسون با پارامترهای $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ می‌باشند احتمال اینکه $P\{x^2+y^2\le 2\}$ باشد برابر چه مقداری است؟ X و Y مستقل هستند.

توزیع پواسون با پارامتر a : $P(x=n)=e^{-a}\frac{a^n}{n!}\ ,\ n\ge 0$

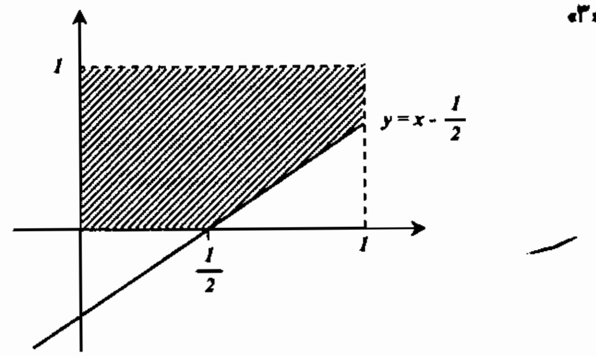
۱) $\frac{2}{e}$ ۲) $\frac{2}{3e}$ ۳) $\frac{1}{3e}$ ۴) $\frac{1}{2e}$

پاسخنامه آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۵

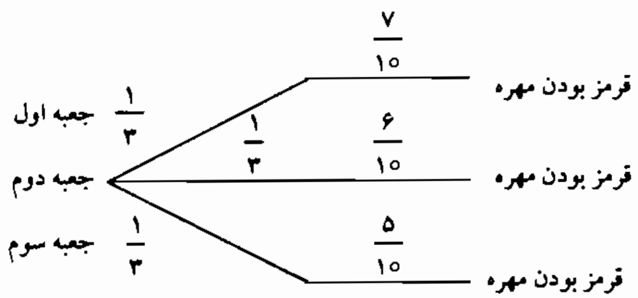
۱ـ گزینه «۳»

$$P(A)=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{x-\frac{1}{2}}dy\,dx=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=1\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=1-0/125=0/875$$



۲ـ گزینه «۴» با استفاده از قضیه احتمال کل و نمودار درختی داریم:



$$\Rightarrow P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}=0/6$$

۳ـ گزینه «۲»

$$Cov(x+y,x-y)=Cov(x,y)-Cov(y,y)+Cov(\cancel{x},y)=Cov(\cancel{y},x)=Var(x)-Var(y)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

۴ـ گزینه «۳»

P (حداقل در یک از پرتابها زوج رخ دهد) = ۱ − P (در هیچ پرتابی زوج رخ ندهد) = $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

۵ـ گزینه صحیح وجود ندارد.

چون x و y مستقلند $P(x^2+y^2\le 2)=P(x=0,y=0)+P(x=0,y=1)+P(x=1,y=0)+P(x=1,y=1)\Rightarrow$

$$=P(x=0)P(y=0)+P(x=0).P(y=1)+P(x=1).P(y=0)+P(x=1).P(y=1)$$

$$=e^{-\frac{1}{3}}.e^{-\frac{2}{3}}+e^{-\frac{1}{3}}.\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}.e^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}.\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}}=e^{-1}+\frac{2}{3}e^{-1}+\frac{1}{3}e^{-1}+\frac{2}{9}e^{-1}=\frac{20}{9}e^{-1}$$

سئوالات آزمون رشته مهندسی برق ـ سراسری ۸۶

۱ـ اتومبیل I در جاده ناگهان توقف می‌کند و اتومبیل II از عقب به آن برخورد می‌نماید در حالی که ناظران A، B و C شاهد آنها هستند. اگر احتمال اینکه این ناظران به درستی رویداد را ملاحظه و گواهی کرده باشند به ترتیب برابر ۰/۹، ۰/۸ و ۰/۷ باشد، انگاه احتمال اینکه لااقل دو شاهد رویداد را صحیح گواهی نمایند برابر کدام است؟

۱) ۰/۸۹۲ ۲) ۰/۹۰۲ ۳) ۰/۹۰۸ ۴) ۰/۹۹۴

۲ـ X یک متغیر تصادفی با میانگین $\frac{5}{4}$ و دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$f_X(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ b & 1<x<a \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$ ، مقادیر a و b به ترتیب برابر است با:

۱) $b=\frac{1}{4}, a=3$ ۲) $b=\frac{1}{2}, a=2$ ۳) $b=\frac{1}{3}, a=2$ ۴) $b=\frac{2}{3}, a=2$

۳ـ اگر X و Y دو متغیر تصادفی نمایی مستقل با میانگین‌های به ترتیب $\frac{1}{\mu_1}$ و $\frac{1}{\mu_2}$ باشند، آنگاه توزیع متغیر تصادفی $Z=\min(X,Y)$ و میانگین آن به ترتیب عبارت خواهد بود از:

۱) نمایی و $\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}$ ۲) نمایی و $\frac{1}{\mu_1+\mu_2}$

۳) ارلانگ مرتبه ۲ و $\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}$ ۴) ارلانگ مرتبه ۲ و $\frac{1}{\mu_1+\mu_2}$

۴ـ تابع احتمال متغیر تصادفی X و متغیر تصادفی $(Y\mid X)$ به صورت زیر داده شده است:

$f_X(x)=\begin{cases} 3x^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$ و $f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases} \frac{3y^2}{x^3} & 0<y<x \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$

در این صورت $E(X\mid Y)$ کدام است؟

۱) $\frac{1-y}{\text{Ln}(y)}$ ۲) $\frac{\text{Ln}(y)}{1-y}$ ۳) $\frac{y-1}{\text{Ln}(y)}$ ۴) $E(X\mid Y)$ وجود ندارد.

پاسخنامه آزمون رشته مهندسی برق ـ سراسری ۸۶

۱ـ گزینه «۲»

$P(\text{لااقل ۲ مشاهده}) = P(\text{دو مشاهده}) + P(\text{سه مشاهده})$

$=0/7\times 0/8+0/1+0/7\times 0/2\times 0/9+0/3\times 0/8\times 0/9+0/7\times 0/8\times 0/9=0/902$

۲ـ گزینه «۱»

می‌دانیم: $\int_0^1 x^2dx+\int_1^a bdx=1\Rightarrow \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.bx\right|_1^a=1\Rightarrow ab-b=\frac{2}{3}$ (I)

از طرفی: $E(x)=\frac{5}{4}=\int_0^1 x^3dx+\int_1^a bxdx=\frac{5}{4}\Rightarrow \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1+\left.\frac{bx^2}{2}\right|_1^a=\frac{5}{4}\Rightarrow \frac{a^2b}{2}-\frac{b}{2}=1\Rightarrow a^2b-b=2$ (II)

$(I),(II)\Rightarrow a=3\ ,\ b=\frac{1}{4}$

۳ـ گزینه «۲»

$F_Z(Z)=p(Z\le Z)=p(\min(X,Y)\le Z)=1-p(\min(X,Y)\ge Z)=1-p(X\ge Z,Y\ge Z)$

$=1-p(X\ge Z).p(Y\ge Z)=1-[(1-F_X(Z))(1-F_Y(Z))]=1-[1-(1-e^{-\mu_1 z})(1-(1-e^{-\mu_2 z})]=1-[e^{-(\mu_1+\mu_2)z}]$

$\Rightarrow\quad f_Z(Z)=(\mu_1+\mu_2).e^{-(\mu_1+\mu_2)z}\sim \exp(\frac{1}{\mu_1+\mu_2})$

۴ـ گزینه «۳»

$f_{y|x}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}\Rightarrow f(x,y)=\frac{9y^2}{x}\qquad \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<y<x \end{matrix}$

$f_{x|y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{9y^2}{x}}{\int_y^1 \frac{9y^2}{x}dx}=\frac{\frac{9y^2}{x}}{9y^2.(\ln y)}=-\frac{1}{x\ln y}$

$E(x|y)=\int_y^1 \cancel{x}\ .(\frac{-1}{\cancel{x}\ \ln y})dx=\frac{-1}{\ln y}(1-y)=\frac{y-1}{\ln y}$

سئوالات آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶

۱ـ فرض کنید تابع مولد احتمال متغیر تصادفی x برابر است با $M_x(t) = e^{t-1}$ ، مطلوبست واریانس X .

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ـ فرض کنید $0 < x < \theta$ و $f(x) = \frac{1}{\theta}$. به ازای یک نمونه n تایی برآورد گشتاوری θ چیست؟

۱) $\overline{X}$ ۲) $\frac{\overline{X}}{2}$ ۳) $2\overline{X}$ ۴) $\frac{2}{\overline{X}}$

۳ـ معمولاً ۵٪ تولیدات کارخانه‌ای معیوب می‌باشد. در یک نمونهٔ ۱۰۰ تایی ضریب تغییرات این جامعه عبارتست از:

۱) $\frac{475}{50}$ ۲) $\frac{475}{\sqrt{50}}$ ۳) $\sqrt{\frac{475}{50}}$ ۴) $\frac{\sqrt{475}}{50}$

۴ـ هدف بررسی نسبت بی‌سوادان در یک شهر می‌باشد. چه حجمی از نمونه لازم است تا ۹۵٪ مطمئن باشیم حداکثر خطای براورد بیشتر از ۵٪ نخواهد شد؟ $(Z_{0/975} = 1/96)$

۱) ۳۸۰ ۲) ۳۸۵ ۳) ۲۹۰ ۴) ۴۰۰

۵ـ در کارخانه‌ای سه بخش تولیدی وجود دارد که میزان تولیدات بخش دوم و سوم به ترتیب دو برابر و ۳ برابر بخش اول می‌باشد. همچنین به ترتیب ۴٪ ، ۵٪ و ۶٪ تولیدات بخش‌ها معیوب هستند. کالایی از تولیدات انتخاب می‌شود، احتمال اینکه معیوب باشد چقدر است؟

۱) $\frac{4}{75}$ ۲) $\frac{10}{75}$ ۳) $\frac{65}{75}$ ۴) $\frac{71}{75}$

۶ـ فرض کنید چگالی x عبارتست از:

x	۱	۲	۳	۴
$f_\theta(x)$	$\frac{1-\theta}{4}$	$\frac{1+\theta}{4}$	$\frac{1-2\theta}{4}$	$\frac{1+2\theta}{4}$

$$-\frac{1}{8} < \theta < \frac{1}{8}$$

به ازاء نمونه $(x_1, x_2) = (2,3)$ براورد حداکثر درست نمایی θ عبارتست از:

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخنامه آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶

۱ـ گزینه صحیح وجود ندارد.

می‌دانیم در تابع مولد گشتاور $E(X^r) = \left.\frac{dM_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0}$ بنابراین:

$$E(X) = e^{-1}$$

$$E(X^2) = e^{-1}$$

$$\Rightarrow \ Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = e^{-1} - e^{-2}$$

۲ـ گزینه «۳» طبق خاصیت برآورد گشتاوری:

$$E(x) = \overline{x} = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \tilde{\theta} = 2\overline{x}$$

۳ـ گزینه «۴»

$$CV = \frac{S}{\overline{X}} = \frac{\sqrt{npq}}{n.p} = \frac{\sqrt{100 \times \frac{5}{100} \times \frac{95}{100}}}{100 \times \frac{5}{100}} = \frac{\sqrt{475}}{50}$$

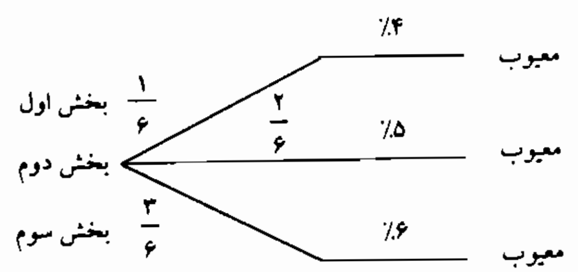
۴ـ گزینه «۲»

$$n = \frac{Z^2_{\frac{\alpha}{2}} .\hat{p}.\hat{q}}{e^2} = \frac{(1/96)^2 \times \frac{1}{4}}{(\frac{5}{100})^2} = 385$$

۵ـ گزینه «۱» با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

	بخش۱	بخش۲	بخش۳
P	k	2k	3k

$$\Rightarrow 6k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{6}$$



$$\Rightarrow P\,(\text{معیوب بودن}) = \frac{1}{6} \times 4\% + \frac{2}{6} \times 5\% + \frac{3}{6} \times 6\% = \frac{4}{75}$$

۶ـ گزینه «۳»

$$L(\theta) = (\frac{1+\theta}{4})(\frac{1+2\theta}{4}) \qquad -\frac{1}{8} < \theta < \frac{1}{8} \qquad \Rightarrow L(\theta) = \frac{-2\theta^2 - \theta + 1}{16} \Rightarrow \hat{\theta} = -\frac{1}{8}$$

سوالات آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۶

۱ـ کدام یک از عبارات زیر غلط هستند؟

۱) اگر دو متغیر تصادفی x و y مستقل باشند، آن‌گاه x و y ناهمبسته هستند.

۲) اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند آن‌گاه A و B' نیز مستقلند

۳) اگر A و B دو پیشامد جدا از هم باشند آن‌گاه مستقلند.

۴) اگر x و y ناهمبسته بوده و متوسط x صفر باشد آن‌گاه x و y بر هم عمودند.

۲ـ فرض کنید در ارسال اطلاعات بین دو کامپیوتر، بسته‌های اطلاعاتی ارسالی ۴ بیتی بوده و احتمال خطا در هر بیت آن $\frac{1}{3}$ و مستقل از هم باشند. احتمال این که بسته‌ای را صحیح دریافت کنیم برابر است با:

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۵

۳ـ متغیر تصادفی x دارای مقادیر داده شده با احتمال‌های مشخص شده در جدول می‌باشد، ماکزیمم مقدار متوسط x چقدر است؟ (p یک متغیر حقیقی است)

مقدار x	p	1	$2-p$
احتمال مربوط	$1-2p$	p	p

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) ۱

۴ـ متغیر تصادفی x دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(1,2)$ بوده و داریم:

$$Y=\begin{cases}|x| : & |x|\le 1\\ 0 : & |x|>1\end{cases}$$

، مقدار واریانس Y برابر است با:

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{5}{48}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{5}{56}$

۵ـ متغیر تصادفی X و Y بر هم عمود بوده (orthogonal) و متوسط X دو برابر متوسط Y می‌باشد در مورد علامت ضریب همبستگی می‌توان گفت:

۱) مثبت یا صفر است. ۲) همواره منفی است. ۳) همواره مثبت است. ۴) منفی یا صفر است.

۶ـ اگر تعداد تصادفات یک جاده دارای توزیع پوآسون با متوسط a تصادف در روز باشد، احتمال این که حداقل یک تصادف در روز رخ دهد برابر است با:

۱) e^{-a} ۲) $1-2e^{-a}$ ۳) $2e^{-a}$ ۴) $1-e^{-a}$

۷ـ گروهی داریم متشکل از ۱۹۱ دانشجو که ۱۰ نفر دروس فرانسه، بازرگانی و موسیقی، ۳۶ نفر دروس فرانسه و بازرگانی، ۲۰ نفر دروس فرانسه و موسیقی، ۱۸ نفر دروس بازرگانی و موسیقی، ۶۵ نفر فرانسه، ۷۶ نفر بازرگانی . ۶۳ نفر موسیقی را اخذ کرده‌اند. چند نفر هیچ یک از این سه دروس را اخذ نکرده‌اند؟

۱) ۷۷ ۲) ۵۴ ۳) ۳۴ ۴) ۵۱

۸ـ مجموعه‌ای داریم از پنج کتاب متمایز کامپیوتر، سه کتاب متمایز ریاضی و دو کتاب متمایز هنر، به چند صورت می‌توانیم این کتاب‌ها را در یک قفسه قرار دهیم طوری که دو کتاب هنر در کنار یکدیگر قرار نگیرند؟

۱) $9!$ ۲) $8!\times 2!$ ۳) $10!-9\times 2!$ ۴) $10!-8!\times 2!$

پاسخنامه آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ آزاد ۸۶

۱ـ گزینه «۳» جدا بودن دو پیشامد دلیل بر مستقل بودن آنها نیست برای استقلال دو پیشامد باید شرط $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ برقرار باشد.

◆ ◆ ◆ ◆

۲ـ گزینه «۱» برای آنکه بسته صحیح دریافت شود باید هر ۴ بیت به صورت صحیح دریافت شود.

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(D)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\simeq 0/2$$

◆ ◆ ◆ ◆

۳ـ گزینه «۲»

$$E(X)=\sum X\cdot P(X=x)=P(1-2P)+1\times P+(2-P)P$$

$$=P-2P^2+P+2P-P^2=-3P^2+4P$$

$$\Rightarrow\frac{\partial E(X)}{\partial P}=0\Rightarrow -6P+4=0\Rightarrow -6P=-4\Rightarrow P=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial^2 E(X)}{\partial P^2}=-6<0$$

بنابراین $P=\frac{2}{3}$ نقطه ماکزیمم است.

◆ ◆ ◆ ◆

۴ـ گزینه «۲»

$$E(y)=\int_{-1}^{1}|x|\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{x^2}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

$$E(y^2)=\int_{-1}^{1}|x|^2\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

$$Var(y)=E(y^2)-(E(y))^2=\frac{1}{6}-(\frac{1}{4})^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{16}=\frac{5}{48}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۵ـ گزینه «۳»

◆ ◆ ◆ ◆

۶ـ گزینه «۴»

$$X\sim P(a)\Rightarrow P(X\ge 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\frac{e^{-a}\cdot a^0}{0!}=1-e^{-a}$$

◆ ◆ ◆ ◆

۷ـ گزینه «۴»

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$=65+76+63-36-20-18+10=140$$

$$n(A'\cap B'\cap C')=n(A\cup B\cup C)'=191-140=51$$

◆ ◆ ◆ ◆

۸ـ گزینه «۳»

حالاتیکه ۲ کتاب هنر در کنار یکدیگر قرار بگیرند − کل حالات = تعداد حالاتیکه ۲ کتاب هنر در کنار یکدیگر قرار نگیرند.

$$=10!-9!\times 2!$$

◆ ◆ ◆ ◆

سئوالات آزمون رشته مهندسی برق ـ سراسری ۸۷

۱ـ از بازه $(0,1)$ دو عضو به تصادف انتخاب کرده و آن‌ها را X و Y می‌نامیم. تعریف می‌کنیم $A=\{x>\frac{1}{2}\}$، $B=\{y>\frac{1}{2}\}$ و $C=\{x>y\}$ در این صورت $P(A \mid C)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۲ـ فرض می‌کنیم X و Y متغیرهای تصادفی مستقل بوده و هر کدام به طور یکنواخت بر بازهٔ $[0,2]$ توزیع شده باشند و $Z=Y-X$ و $A=\{|Y-X|\le 1\}$، در این صورت $P(A \mid X=1)$ و $f_{Z|X}(0 \mid 1)$ و $F_{Z|X}(0 \mid 1)$ به ترتیب برابرند با:

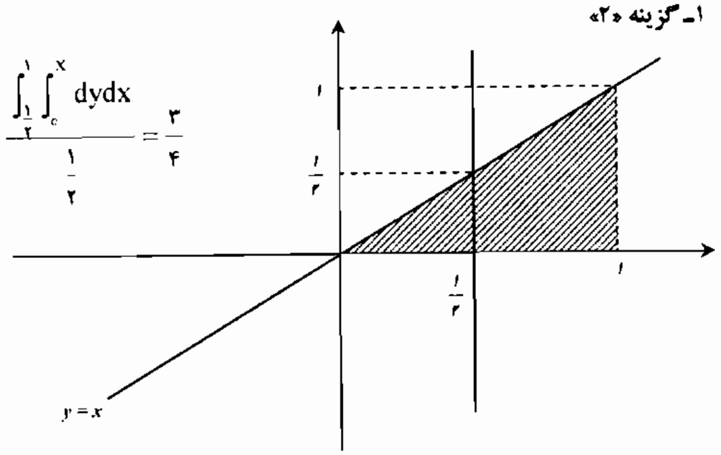
۱) $\frac{3}{4}$، ۱، $\frac{1}{2}$ ۲) ۱، ۰، ۱ ۳) ۱، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$ ۴) ۱، ۰، $\frac{1}{2}$

۳ـ اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_X(x)=Ke^{-x^2-7x}$ باشد $E(X^2)$ برابر است با:

۱) ۱۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{51}{4}$ ۴) $K+\frac{49}{4}$

پاسخنامه آزمون رشته مهندسی برق ـ سراسری ۸۷

۱ـ گزینه «۲»



$$P(A \mid C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(X>\frac{1}{2}, y<x)}{P(y<x)}=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{x} dydx}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

۲ـ گزینه «۳»

$$P(A \mid X=1)=|Y-1|\le 1 \Rightarrow -1\le Y-1\le 1$$

$0\le y\le 2 \Rightarrow P(0\le y\le 2)=1$ کل فضا می‌باشد.

$$f_{Z|X}(0 \mid 1) \Rightarrow Z=y-x \Rightarrow Z \mid X=1=y-1$$

$$y\sim U(0,2) \Rightarrow Z\sim U(-1,1) \Rightarrow f_Z(X=1)=\frac{1}{2}$$

$$F_{Z|X}(0 \mid 1)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx=\frac{x}{2}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{2}$$

۳ـ گزینه «۳»

$$E(X^2)=Var(X)+(E(X))^2$$

از طرفی: $f(x)=Ke^{-x^2-7x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}}=Ke^{-(x^2+7x+\frac{49}{4})-\frac{49}{4}}=Ke^{-\frac{49}{4}}\cdot e^{-(x+\frac{7}{2})^2}\sim N(-\frac{7}{2},\frac{1}{2})$

$$\Rightarrow E(X^2)=\frac{1}{2}+(\frac{7}{2})^2=\frac{1}{2}+\frac{49}{4}=\frac{51}{4}$$

سوالات آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷

۱ـ تعمیرات دستگاه‌های الکترونیکی در یک کارخانه توسط شرکت‌های C, B, A انجام می‌پذیرد بطوریکه ۷۰٪ موارد از A و ۲۰٪ موارد از B و ۱۰٪ موارد از شرکت C استفاده می‌شود. همچنین به ترتیب در ۵٪، ۶٪ و ۴٪ موارد شرکت‌های C, B, A کار خود را به درستی انجام نمی‌دهند. در یک زمان مشخص اگر تعمیر دستگاه الکترونیکی این کارخانه به درستی انجام نشده باشد چقدر احتمال دارد توسط شرکت B انجام شده باشد؟

۱) ۱/۲٪ ۲) $\frac{12}{51}$ ۳) ۵/۱٪ ۴) $\frac{39}{51}$

۲ـ احتمال اینکه فردی که دارای مدرک کارشناسی است در یک آزمون استخدامی قبول شود ۰/۴ است. احتمال اینکه فردی که استخدام می‌شود دارای مدرک کارشناسی باشد ۰/۳ است. احتمال اینکه در این جامعه آماری فردی دارای مدرک کارشناسی ارشد باشد ۰/۷ است. مطلوبست احتمال اینکه یک فرد قبول شود.

۱) ۲۱٪ ۲) $\frac{2}{30}$ ۳) ۰/۲۸ ۴) $\frac{28}{30}$

۳ـ در یک توزیع نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۴، مطلوبست $E(e^{\frac{x}{2}})$.

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) e^3 ۴) e^4

۴ـ فرض کنید یک نمونه ۴ از توزیع نمایی با میانگین θ انتخاب شده است و مقادیر آن ۴، ۵، ۷ و ۴ می‌باشد برآورد گشتاوری $(\tilde{\theta})$ و حداکثر درست نمایی $(\hat{\theta})$ θ به ترتیب عبارتست از: $((\hat{\theta},\tilde{\theta})=?)$

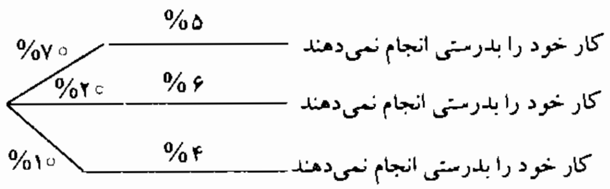
۱) (۵ و ۴) ۲) (۵ و ۵) ۳) (۴ و ۵) ۴) (۵ و ۷)

۵ـ فرض کنید $x_1,\dots,x_n$ یک نمونه تصادفی به حجم $n=36$ از توزیع پواسون با پارامتر λ باشد. برای آزمون فرض $H_0: \lambda=3$ در مقابل $H_1: \lambda=4$ در سطح $\alpha=5\%$ اگر $\sum X_i=144$ باشد در آن صورت آماره آزمون برابر است با:

۱) ۳ ۲) $\sqrt{12}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{10}$

پاسخنامه آزمون رشته مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۷

۱ـ گزینه «۲» با استفاده از قضیه بیز و نمودار درختی داریم:



$$P(B|\text{کار به درستی انجام نشده}) = \frac{20\%\times 6\%}{70\%\times 5\% + 20\%\times 6\% + 10\%\times 4\%} = \frac{12}{51}$$

۲ـ گزینه «۴»

$P(A)=0/7$

$P(B|A)=0/4 \qquad P(B|A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B\cap A)=\dfrac{28}{100}$

$P(A|B)=0/3$

$P(B)=?$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{3}{10}=\frac{\frac{28}{100}}{P(B)} \Rightarrow P(B)=\frac{28}{30}$$

۳ـ گزینه «۳»

$$X\sim N(2,4) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{1}{8}(x-2)^2}$$

$$E(e^{\frac{x}{2}})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x}{2}}\frac{1}{\sqrt{8\pi}}e^{-\frac{1}{8}(x-2)^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{8}(x^2-4x+4)}dx=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{8}x^2+x-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{8}(x-4)^2}\cdot e^3dx=e^3$$

۴ـ گزینه «۲»

$$E(X)=\theta \Rightarrow \tilde{\theta}=\bar{X}=\frac{4+5+7+4}{4}=5$$

$$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} \Rightarrow L(\theta)=\theta^{-4}\cdot e^{-\frac{\sum X_i}{\theta}}$$

$$L(\theta)=-4\text{Ln}\theta-\frac{\sum X_i}{\theta} \Rightarrow L'(\theta)=0 \Rightarrow -\frac{4}{\theta}+\frac{\sum X_i}{\theta^2}=0$$

$$-4\theta+\sum X_i=0 \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{\sum X_i}{4}=\bar{X}=5$$

۵ـ گزینه «۲»

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_{0}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{\frac{۱۴۴}{۳۶}-۳}{\frac{۳}{\sqrt{۳۶}}}=\sqrt{۱۲}$$

در توزیع پواسون میانگین همان λ می‌باشد. توجه: $E(X)=\mu=\lambda$

پاسخنامه آزمون‌ها

پاسخنامه آزمون فصل اول			مفاهیم آمار توصیفی	
۱ـ گزینه «۴»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۳»

پاسخنامه آزمون فصل دوم			احتمال یا قوانین شانس	
۱ـ گزینه «۲»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۱»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۳»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۴»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۴»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۱»
۲۱ـ گزینه «۴»	۲۲ـ گزینه «۱»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۲»	۲۵ـ گزینه «۳»
۲۶ـ گزینه «۱»	۲۷ـ گزینه «۴»	۲۸ـ گزینه «۴»	۲۹ـ گزینه «۱»	۳۰ـ گزینه «۱»
۳۱ـ گزینه «۱»	۳۲ـ گزینه «۴»	۳۳ـ گزینه «۳»	۳۴ـ گزینه «۱»	۳۵ـ گزینه «۲»
۳۶ـ گزینه «۳»	۳۷ـ گزینه «۱»	۳۸ـ گزینه «۱»	۳۹ـ گزینه «۳»	۴۰ـ گزینه «۳»
۴۱ـ گزینه «۲»	۴۲ـ گزینه «۱»	۴۳ـ گزینه «۳»	۴۴ـ گزینه «۱»	۴۵ـ گزینه «۲»
۴۶ـ گزینه «۳»	۴۷ـ گزینه «۲»	۴۸ـ گزینه «۳»	۴۹ـ گزینه «۳»	۵۰ـ گزینه «۱»
۵۱ـ گزینه «۲»	۵۲ـ گزینه «۱»	۵۳ـ گزینه «۱»	۵۴ـ گزینه «۲»	۵۵ـ گزینه «۳»
۵۶ـ گزینه «۱»	۵۷ـ گزینه «۲»	۵۸ـ گزینه «۱»	۵۹ـ گزینه «۳»	۶۰ـ گزینه «۳»
۶۱ـ گزینه «۳»	۶۲ـ گزینه «۴»	۶۳ـ گزینه «۲»	۶۴ـ گزینه «۱»	۶۵ـ گزینه «۲»
۶۶ـ گزینه «۳»	۶۷ـ گزینه «۲»	۶۸ـ گزینه «۳»	۶۹ـ گزینه «۴»	۷۰ـ گزینه «۴»

پاسخنامه آزمون فصل سوم			متغیرهای تصادفی	
۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۴»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۱»	۵ـ گزینه «۲»
۶ـ گزینه «۱»	۷ـ گزینه «۳»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»
۱۱ـ گزینه «۲»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۱»	۱۴ـ گزینه «۱»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۱»	۱۹ـ گزینه «۴»	۲۰ـ گزینه «۴»

پاسخنامه آزمون فصل چهارم		توزیعهای آماری		
۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۱»	۳ـ گزینه «۴»	۴ـ گزینه «۲»	۵ـ گزینه «۴»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۱»	۸ـ گزینه «۲»	۹ـ گزینه «۳»	۱۰ـ گزینه «۳»
۱۱ـ گزینه «۱»	۱۲ـ گزینه «۱»	۱۳ـ گزینه «۴»	۱۴ـ گزینه «۳»	۱۵ـ گزینه «۳»
۱۶ـ گزینه «۲»	۱۷ـ گزینه «۳»	۱۸ـ گزینه «۲»	۱۹ـ گزینه «۲»	۲۰ـ گزینه «۲»
۲۱ـ گزینه «۲»	۲۲ـ گزینه «۳»	۲۳ـ گزینه «۲»	۲۴ـ گزینه «۱»	۲۵ـ گزینه «۳»
۲۶ـ گزینه «۳»	۲۷ـ گزینه «۱»	۲۸ـ گزینه «۴»	۲۹ـ گزینه «۴»	۳۰ـ گزینه «۴»
۳۱ـ گزینه «۱»	۳۲ـ گزینه «۲»	۳۳ـ گزینه «۳»	۳۴ـ گزینه «۲»	۳۵ـ گزینه «۱»
۳۶ـ گزینه «۳»	۳۷ـ گزینه «۱»	۳۸ـ گزینه «۳»	۳۹ـ گزینه «۳»	۴۰ـ گزینه «۳»
۴۱ـ گزینه «۲»	۴۲ـ گزینه «۱»	۴۳ـ گزینه «۲»	۴۴ـ گزینه «۲»	۴۵ـ گزینه «۱»
۴۶ـ گزینه «۴»	۴۷ـ گزینه «۲»	۴۸ـ گزینه «۴»	۴۹ـ گزینه «۲»	۵۰ـ گزینه «۱»

پاسخنامه آزمون فصل پنجم		نظریه برآورد		
۱ـ گزینه «۳»	۲ـ گزینه «۳»	۳ـ گزینه «۳»	۴ـ گزینه «۳»	۵ـ گزینه «۳»
۶ـ گزینه «۳»	۷ـ گزینه «۴»	۸ـ گزینه «۳»	۹ـ گزینه «۲»	۱۰ـ گزینه «۱»

منابع و مراجع

1- andersson, T. W. and Scolv, S.I. (1978), An Introduction to the Statistical Analysis of Data. Houghton Miffin, Boston.
2- Hodges, J.L. and Lehmann, E.L. (1970), Basic concepts of Probability and Statistics, 2nd.Ed., Hoden-Day, San Framcisco.
3-Hunter, J.S.(1988), The Digidot Plot, The American Statistician, 42, page 54.
4-Hines W.W.& D.C. Montgomery; probabiliy and Statistics in Engineering and Management Science; Third Edition, John Wiley & Sons, 1990.
5- Hogg, Robert V.& Allen T.Craig; Introduction to Mathematical Statistics; Fifth Edition, Prentic Hall, 1995.
6- Larson, Harold J.; Introduction to probability; Addison Wesley, 1995.
7- Mendenhall, William, Dennis D. Wackerly & Richard L.Scheaffer; Mathematical Statistics with Applications; Fourth Edition, PWSKENT, 1990.
8-Montgomery, Douglas C.& George C.Runger; Applied Statistics & Probability for Engineers; First Edition, John Wiley & Sons, 1994.
9-Moor, D.S. (1995), The Basic Practice of Statistics, W.H. Freeman and Company.
10-Ross, Scheldon; Introduction to Probability, Fourth Edition, Macmillan, 1994.
11-Ross, Sheldon; Interoduction to Probability Models, Sixth Edition, Academic Press, 1997.
12-Scheaffer, Richard L. & James T. Mc Clave; Probability and Ctatistic for Engineers; Fourth Edition, Duxbury, 1995.
13-Stack, Henry & John W.Woods; Probability, Randon Processes, and Estimation Theory for Engineers, First Edition, Prentice Hall, 1986.
14-Spiegel, M.R. (1961), Theory and Problems of Statistics, Schaum publishing Co., New York.
15-Velleman, P.F. and Wilkinson, L. (1993), Nominal, Ordinal, Interval and RatioTypologies are Nmisleading, The American Statistician, 47, pp 65-72.
16-Walpole Ronald E.& Raymond. H. Myers; Probability and statistics for Engineers and Scientists; Fifth Edition, Macmillian, 1993.

۱ـ آمار و احتمال مقدماتی، مؤلف: دکتر جواد بهبودیان
۲ـ مبانی آمار ریاضی، مؤلف: دکتر احمد پارسیان
۳ـ نظریه احتمال و کاربرد آن، مؤلف: دکتر سید تقی اخوان نیاکی
۴ـ آمار و احتمالات مهندسی، مؤلف: دکتر نادر نعمت‌الهی
۵ـ احتمال و آمار (جلد اول)، مؤلف: موریس دگروت ـ مارک اسکرویش، ترجمه: دکتر عین‌الله پاشا
۶ـ مبانی احتمال، مؤلف: سعید قهرمانی، ترجمه: دکتر غلامحسین شاهکار، دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا
۷ـ احتمال و استنباط آماری (جلد اول)، مؤلف: رابرت . و . هوگ، ترجمه: دکتر نوروز ایزد دوستدار ـ دکتر حمید پزشک
۸ـ سئوالات کارشناسی ارشد ۸۶ـ۷۲